



INFUSION NOTES
WHEN ONLY THE BEST WILL DO

REET

(मुख्य परीक्षा हेतु)

Level – 2



ॐ सरस्वती मया दृष्ट्वा, वीणा पुस्तक धारणीम।
हंस वाहिनी समायुक्ता मां विद्या दान करोतु मे ॐ॥

भाग – 4

गणित एवं विज्ञान + शिक्षण विधियाँ

प्रस्तावना

प्रिय पाठकों, प्रस्तुत नोट्स “राजस्थान 3rd ग्रेड (REET मुख्य परीक्षा लेवल - 2 हेतु) को एक विभिन्न अपने अपने विषयों में निपुण अध्यापकों एवं सहकर्मियों की टीम के द्वारा तैयार किया गया है / ये नोट्स पाठकों को राजस्थान कर्मचारी चयन बोर्ड, जयपुर (RSMSSB) द्वारा आयोजित करायी जाने वाली परीक्षा “राजस्थान 3rd ग्रेड (REET मुख्य परीक्षा लेवल - 2)” की परीक्षा में पूर्ण संभव मदद करेंगे।

अंततः सतर्क प्रयासों के बावजूद नोट्स में कुछ कमियों तथा त्रुटियों के रहने की संभावना हो सकती है / अतः आप सूचि पाठकों का सुझाव सादर आमंत्रित हैं।

प्रकाशकः

INFUSION NOTES

जयपुर, 302029 (RAJASTHAN)

मो : 9887809083

ईमेल : contact@infusionnotes.com

वेबसाइट : <http://www.infusionnotes.com>

WhatsApp करें - <https://wa.link/ny6pbb>

Online Order करें - <https://shorturl.at/lIvKO>

मूल्य : ₹

संस्करण : नवीनतम

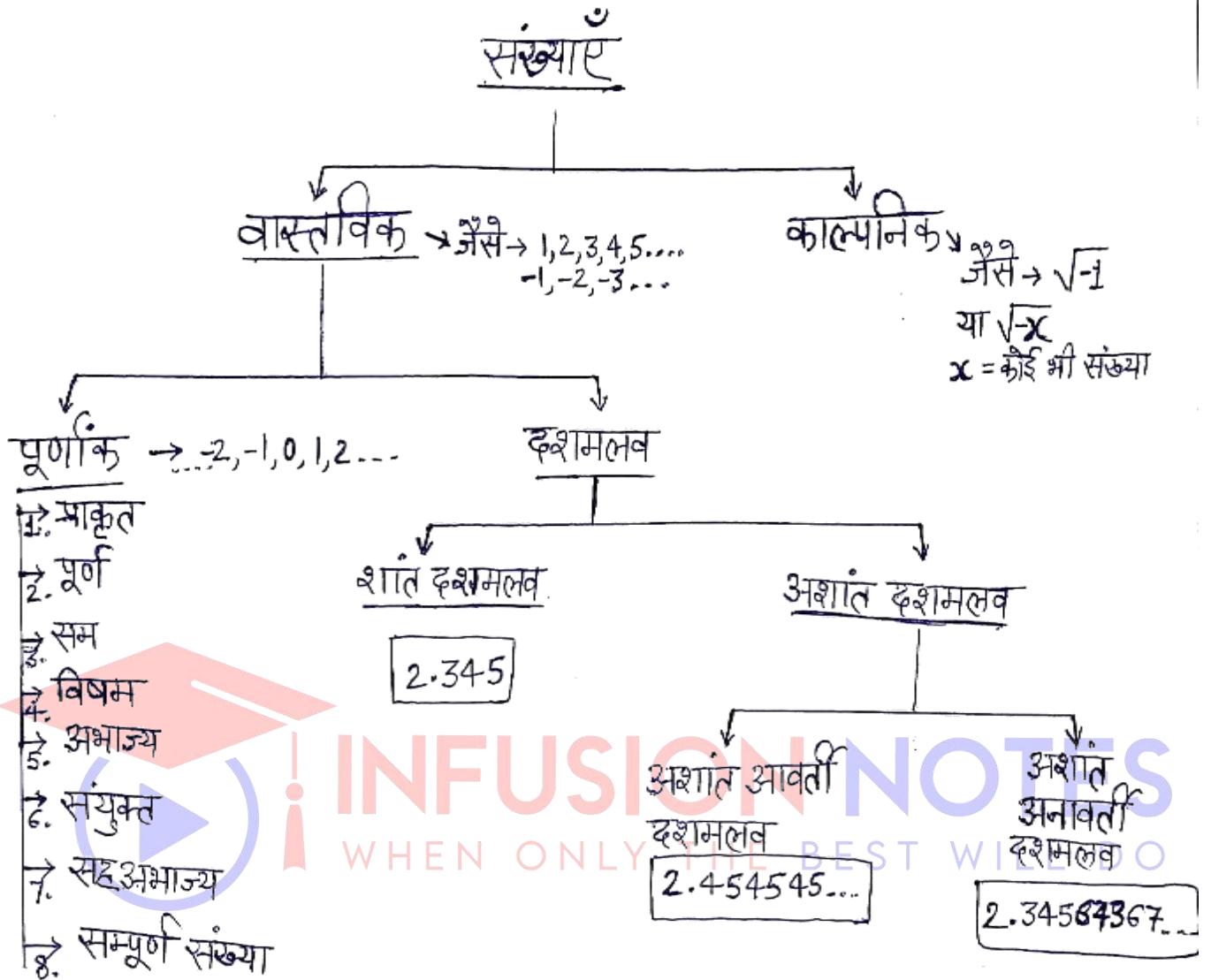
क्र. सं.	अध्याय	पृष्ठ सं.
<u>गणित</u>		
1.	संख्या प्रणाली	1
2.	वास्तविक संख्याओं के लिए घातांक नियम	12
3.	वर्ग और वर्गमूल	15
4.	घन और घनमूल	23
5.	बहुपद एवं गुणनखंड	27
6.	दो चरों वाले रैखिक समीकरण	39
7.	द्विघात समीकरण	45
8.	लघुगणक	54
9.	प्रतिशतता	58
10.	लाभ और हानि	72
11.	साधारण ब्याज	83
12.	चक्रवृद्धि ब्याज	94
13.	अनुपात-समानुपात	101
14.	वृद्धि एवं हास दर	109
15.	रेखाएँ एवं कोण	111
16.	समतलीय आकृतियाँ	116

17.	समतलीय आकृतियों के क्षेत्रफल एवं परिमाप	135
18.	ठोस आकृतियाँ	149
19.	सांख्यिकी	156
20.	प्रायिकता	173
21.	गणित की शिक्षण विधियाँ	178
<u>सामान्य विज्ञान</u>		
1.	परमाणु एवं अणु, मोल संकल्पना, रासायनिक सूत्र , परमाणु संरचना	196
2.	तत्व यौगिक और मिश्रण, भौतिक एवं रासायनिक परिवर्तन	204
3.	रासायनिक अभिक्रिया और समीकरण, उपचयन एवं अपचयन	208
4.	अम्ल, क्षार और लवण, pH स्केल	211
5.	कार्बन तथा उसके यौगिक	215
6.	कोशिका - संरचना एवं प्रकार्य	230
7.	ऊतक - पादप ऊतक, जंतु ऊतक, सरल एवं जटिल ऊतक	234
8.	जैव प्रक्रम - पोषण, श्वसन, परिवहन उत्सर्जन	240
9.	नियंत्रण और समन्वय	247

10.	जीवों में जनन, जनन में हार्मोन्स की भूमिका	251
11.	सूक्ष्म जीवों से फैलने वाले रोग, संक्रामक रोग	258
12.	जैव रासायनिक चक्र	268
13.	भोजन के प्रमुख अवयव और इनकी कमी से होने वाले रोग, संतुलित भोजन	277
14.	बल, गति, गति के नियम	287
15.	विद्युत एवं विद्युत परिपथ, ओम का नियम, प्रतिरोधों का संयोजन, विद्युत धारा के तापीय, रासायनिक एवं चुम्बकीय प्रभाव	289
16.	गुरुत्वाकर्षक, कैपलर के नियम, उत्प्लावकता, आर्किमीडीज का सिद्धांत	299
17.	ताप एवं ऊष्मा, तापमापी, ऊष्मा संचरण	304
18.	प्रकाश का परावर्तन, गोलीय दर्पण, प्रकाश का अपवर्तन, गोलीय लेंस, मानव नेत्र, दृष्टि दोष	308
19.	ध्वनि	313
20.	ब्रह्माण्ड एवं सौरमंडल	317
21.	विज्ञान की शिक्षण विधियाँ	322

अध्याय - 1

संख्या प्रणाली



संख्या - एकल अंक अथवा अंकों का समूह संख्या कहलाता है। गणित की मूल विषय वस्तु संख्याएँ हैं। 0 से अंत तक की सभी धनात्मक संख्याओं को पूर्ण संख्या कहते हैं। जैसे- 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 शून्य भी एक पूर्ण संख्या है।

1. प्राकृत संख्याएँ - 1, 2, 3, 4, ...
2. पूर्ण संख्याएँ - 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...
3. पूर्णांक संख्याएँ - $-\infty$ से $+\infty$ तक
4. धनात्मक संख्याएँ :- 1, 2, 3, 4, 5, ...
5. ऋणात्मक संख्याएँ :- -1, -2, -3, -4, -5, ...

नोट: 0 न तो धनात्मक संख्या है और न ही ऋणात्मक संख्या है यह उदासीन संख्या है।

प्राकृतिक संख्याएँ :- वे संख्याएँ जिनसे वस्तुओं की गणना की जाती है उन्हें धन पूर्णांक या प्राकृतिक संख्याएँ कहते हैं। उदा. 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... ∞

- शून्य प्राकृतिक संख्या नहीं है।

- कोई भी ऋणात्मक संख्या प्राकृतिक नहीं है।
- भिन्नात्मक संख्या प्राकृतिक संख्या नहीं होती है। जैसे:- $3/4$, $-1/5$

सम संख्याएँ :- वे संख्याएँ जो दो 2 से पूर्णतः विभाज्य हो सम संख्याएँ कहलाती हैं।

नोट: शून्य एक सम संख्या है।

विषम संख्याएँ :- वे संख्याएँ जो 2 से विभाजित न हों विषम संख्याएँ कहलाती हैं।

उदा. 1, 3, 5, 7, 9, 11, आदि। शून्य विषम संख्या नहीं है।

भाज्य संख्याएँ :- 1 से बड़ी वे सभी संख्याएँ जिनमें स्वयं और एक के अतिरिक्त कम से कम एक और संख्या का भाग लग सके भाज्य संख्याएँ कहलाती हैं। जैसे 4, 6, 8, 9, 15, 16 आदि।

नोट: दो (2) एक भाज्य संख्या नहीं है। यह एक अभाज्य संख्या है।

अभाज्य संख्याएँ :- वे संख्याएँ जो 1 और स्वयं के अतिरिक्त अन्य किसी संख्या से विभाज्य न हो अभाज्य संख्याएँ कहलाती हैं। उदा. 2, 3, 5, 7, 11, 13, आदि संख्याएँ अभाज्य संख्याएँ हैं।

नोट: एक (1) अभाज्य संख्या नहीं है और न ही इसे भाज्य संख्या कह सकते हैं।

वास्तविक संख्याएँ - वे संख्याएँ जो या तो परिमेय हो या अपरिमेय, वास्तविक संख्याएँ कहलाती हैं। वास्तविक संख्याओं को संख्या रेखा पर प्रदर्शित किया जा सकता है। किसी भी धनपूर्णांक जो पूर्ण वर्ग नहीं है का वर्गमूल अपरिमेय संख्या होगी। जैसे: $\sqrt{8}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{14}$ अपरिमेय संख्याएँ हैं।

वास्तविक संख्याओं पर संक्रियाएँ :-

जब आप वास्तविक संख्याओं और उन पर आधारित गणितीय संक्रियाओं को हल करते हैं तब आपको निम्नलिखित बिंदुओं को ध्यान में रखना चाहिए :-

- जब एक परिमेय और अपरिमेय संख्या को जोड़ा या घटाया जाता है, तो परिणाम एक अपरिमेय संख्या होता है।
- जब एक अपरिमेय संख्या के साथ एक परिमेय संख्या पर गुणा या भाग संक्रिया की जाती है, तो परिणाम एक अपरिमेय संख्या होता है।
- जब दो अपरिमेय संख्याओं को जोड़ा, घटाया, गुणा या विभाजित किया जाता है, तो परिणाम एक परिमेय या एक अपरिमेय संख्या हो सकता है।
- यदि a और b धनात्मक वास्तविक संख्याएँ हैं, तो
- $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b}$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

- $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$
- $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b$
- $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{c} + \sqrt{d}) = \sqrt{ac} + \sqrt{ad} + \sqrt{bc} + \sqrt{bd}$
- $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$

Example 1:

Solve $(2\sqrt{2} + 7\sqrt{7}) + (13\sqrt{2} - 4\sqrt{7})$.

Solution:

$$\begin{aligned} & (2\sqrt{2} + 7\sqrt{7}) + (13\sqrt{2} - 4\sqrt{7}) \\ &= (2\sqrt{2} + 13\sqrt{2}) + (7\sqrt{7} - 4\sqrt{7}) \\ &= (2 + 13)\sqrt{2} + (7 - 4)\sqrt{7} \\ &= 15\sqrt{2} + 3\sqrt{7} \end{aligned}$$

Example 2:

Solve $(7\sqrt{7}) \times (-4\sqrt{7})$

Solution:

$$\begin{aligned} & (7\sqrt{7}) \times (-4\sqrt{7}) \\ &= 7 \times -4 \times \sqrt{7} \times \sqrt{7} \\ &= -28 \times 7 = -196 \end{aligned}$$

Example 3:

Solve $(8\sqrt{21} / 4\sqrt{7})$

Solution:

$$\begin{aligned} & (8\sqrt{21} / 4\sqrt{7}) \\ &= (8\sqrt{7} \times \sqrt{3} / 4\sqrt{7}) \\ &= 2 \times \sqrt{7} \times \sqrt{3} / \sqrt{7} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Example 4:

Solve $(2\sqrt{2} + 7\sqrt{7})(2\sqrt{2} - 7\sqrt{7})$.

Solution:

$$\begin{aligned} & (2\sqrt{2} + 7\sqrt{7})(2\sqrt{2} - 7\sqrt{7}) \\ &= (2\sqrt{2})^2 - (7\sqrt{7})^2 \\ &= 4 \times 2 - 49 \times 7 \\ &= 8 - 343 = -335 \end{aligned}$$

Example 5:

Solve $(\sqrt{2} + \sqrt{7})(\sqrt{3} - \sqrt{11})$.

Solution:

$$\begin{aligned} & (\sqrt{2} + \sqrt{7})(\sqrt{3} - \sqrt{11}) \\ &= \sqrt{2}\sqrt{3} - \sqrt{2}\sqrt{11} + \sqrt{7}\sqrt{3} - \sqrt{7}\sqrt{11} \\ &= \sqrt{6} - \sqrt{22} + \sqrt{21} - \sqrt{77} \end{aligned}$$

परिमेय संख्या :- वैसी वास्तविक संख्याएँ जो p/q के रूप में लिखी जा सके, जहाँ p और q पूर्णांक हो तथा $q \neq 0$ हो, उसे परिमेय संख्या कहते हैं।

अर्थात्, हर और अंश के रूप में लिखी जाने वाली सभी संख्याएँ परिमेय संख्या कहलाती हैं। जहाँ केवल हर शून्य के बराबर न हो। स्पष्ट शब्दों में, एक पूर्णांक संख्या को दूसरे पूर्णांक से भाग देने के उपरान्त जो संख्या प्राप्त होती है, उसे परिमेय संख्या कहते हैं।

जैसे; $1/2$, $2/3$, $3/4$ आदि।

पहचान :-

- संख्याएँ जो p/q के रूप में हो, जहाँ $q \neq 0$ हो।
- p/q के रूप वाले संख्याओं को हल करने पर दशमलव में संख्या प्राप्त हो।
- भिन्न भी परिमेय संख्या होता है।

जैसे:- $4/5, 5/6, 6/7, 2/1, 3.123, 10.121$ आदि.

धनात्मक एवं ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ :-

परिभाषा के अनुसार परिमेय संख्या p/q के रूप की होती है जहाँ p/q दोनों पूर्णांक होते हैं, जिसमें q हमेशा शून्य के बराबर नहीं होता है. परिमेय संख्या धनात्मक और ऋणात्मक हो सकते हैं. संख्याएँ धनात्मक परिमेय होगा यदि और केवल यदि $(+p/q)$ हो. ऋणात्मक परिमेय होगा यदि और केवल यदि $-(p/q)$ हो.

धनात्मक परिमेय:-

- अंश और हर दोनों बराबर चिह्न के हो. अर्थात् $(-p/q)$ या $(+p/q)$ हो, तो वह धनात्मक परिमेय होगा.
- धनात्मक परिमेय हमेशा शून्य से बड़ा होता है।
- जैसे; $4/5, 5/6, 6/7, 2/1, 3.123$

ऋणात्मक परिमेय :-

- यदि अंश और हर दोनों एक दुसरे के विपरीत चिह्न के हो. अर्थात्, $-(p/q) = (-p)/q = p/(-q)$, तो वह ऋणात्मक परिमेय होगा.
- ऋणात्मक परिमेय हमेशा शून्य से छोटा होता है.
- जैसे; $4/-5, -5/6, 6/-7, -2/1, -3.123$

परिमेय संख्या के गुणधर्म :-

चूँकि परिमेय संख्या वास्तविक संख्या का एक भाग है, इसलिए परिमेय संख्या वास्तविक संख्या प्रणाली के सभी गुणों का पालन करता है. इसके अलावा भी कुछ गुण हैं जो नीचे अंकित हैं.

- परिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर पूर्णांक की तरह ही निरूपित किया जा सकता है.
- यदि दो परिमेय संख्याओं को जोड़, घटाव, गुना या भाग किया जाए, तो हमेशा परिमेय संख्या ही प्राप्त होता है.
- परिमेय संख्या के अंश और हर में बराबर संख्या से गुना या भाग किया जाए, तो परिमेय संख्या ही प्राप्त होगा.
- परिमेय संख्याओं का योगफल और गुणनफल की संक्रियाएँ क्रमविनिमेय साहचर्य होती हैं।

Q. दो परिमेय संख्याओं के बीच कितने परिमेय संख्या होते हैं?

Ans; परिमेय संख्या ज्ञात करने का सूत्र $(a+b)/2$ होता है. अर्थात्, दोनों संख्याओं का योग / भागा 2. इस तथ्य के अनुसार दो परिमेय संख्याओं के बीच अनंत संख्याएँ होती हैं.

Q. क्या 2 परिमेय संख्या है?

Ans; हाँ, 2 एक परिमेय संख्या है क्योंकि, 2 को अंश और हर के रूप में लिखा जा सकता है. जैसे; $2/1$.

Q. परिमेय संख्या कौन सी नहीं होती है?

Ans; वह संख्या जो p/q के रूप में नहीं होती है. अर्थात् वैसी संख्या जिसे अंश और हर के रूप में नहीं लिखा जा सकता है. जैसे; $\sqrt{3}, 2.12.....$

Q. क्या शून्य एक परिमेय संख्या है?

Ans; हाँ, शून्य एक परिमेय संख्या है क्योंकि इसे p/q के रूप में व्यक्त किया जा सकता है. जहाँ $q \neq 0$ होगा. जैसे; $0/1$

अपरिमेय संख्या:- वैसी वास्तविक संख्याएँ जिन्हें p/q के रूप में नहीं लिखा जा सके, उन्हें अपरिमेय संख्या कहते हैं। अर्थात्, वैसी संख्याएँ जिन्हें पूर्णांक के अनुपात के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है. साथ ही अंश और हर के रूप में भी व्यक्त नहीं किया जा सकता है. वह अपरिमेय संख्या कहलाती है।

प्रमेय के अनुसार एक अपरिमेय संख्या का दशमलव विस्तार न समाप्त होता है और न ही आवर्त होता है। अपरिमेय संख्याओं के बीच धनात्मक या ऋणात्मक चिन्हों का प्रयोग कर उसे अंश और हर के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

जैसे; $(\sqrt{2} - \sqrt{3})/\sqrt{5}$

पहचान:-

- वैसी संख्या जिन्हें p/q के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ को अपरिमेय संख्या के रूप में व्यक्त किया जाता है. जैसे; $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ आदि.
- जब कोई संख्या जो p/q के रूप में हो, p और q पूर्णांक हो. $q \neq 0$ को एक अपरिमेय संख्या कहा जाता है. अपरिमेय संख्या हमेशा $(\sqrt{\quad})$ के रूप में होता है जिसका वर्गमूल नहीं निकलता है.
- आमतौर पर अपरिमेय को व्यक्त करने के लिए “P” का प्रयोग किया जाता है.
- इसका उपयोग किसी अन्य संख्या के ऋणात्मक चिह्न के साथ किया जाता है. जैसे; $R - P$, जहाँ $R =$ वास्तविक संख्या तथा $P =$ अपरिमेय संख्या आदि.

अपरिमेय संख्या का लिस्ट :-

π (पाई) = $3.141592653.....$

e (Euler's Number) = $2.71828182.....$

ϕ (Golden ratio) = $.61803398$

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{8}$ = मान ज्ञात किया जा सकता है

गणितीय संख्या में कई ऐसे संख्या हैं जो सदैव अपरिमेय संख्या होते हैं. जैसे; $\pi, \sqrt{2}$ आदि. लेकिन सभी अपरिमेय संख्या नहीं होती हैं। इसलिए, यहाँ वैसी संख्याओं को चिह्नित किया गया है जो अपरिमेय हैं.



22. -13 का गुणनात्मक प्रतिलोम होगा -

- (A) 13 (B) $\frac{1}{13}$
(C) $\frac{-1}{13}$ (D) $\frac{-13}{13}$

उत्तर - (C) $\frac{-1}{13}$

23. 5 का गुणनात्मक प्रतिलोम होगा -

- (A) 5 (B) 3
(C) -5 (D) -3

उत्तर - (A) 5

24. $\frac{-5}{8} \times \frac{-3}{7}$ का गुणनात्मक प्रतिलोम होगा -

- (A) $\frac{15}{56}$ (B) $\frac{-15}{56}$
(C) $\frac{-56}{15}$ (D) $\frac{56}{15}$

उत्तर - (D) $\frac{56}{15}$

25. -1 का गुणनात्मक प्रतिलोम होगा -

- (A) शून्य (B) -1
(C) 1 (D) 2

उत्तर - (B) -1

26. -1 का व्युत्क्रम होगा -

- (A) शून्य (B) -1
(C) 1 (D) 2

उत्तर - (C) 1

27. $-\frac{1}{8}$ का गुणनात्मक प्रतिलोम होगा -

- (A) $\frac{-8}{9}$ (B) $\frac{8}{9}$
(C) $\frac{-9}{8}$ (D) $\frac{9}{8}$

उत्तर - (A) $\frac{-8}{9}$

28. $3\frac{1}{3}$ का गुणनात्मक प्रतिलोम होगा -

- (A) 3.3 (B) -3.3
(C) -0.3 (D) 0.3

उत्तर - (D) 0.3

29. कौन-सी परिमेय संख्या अपने व्युत्क्रम के समान होती है?

- (A) 1
(B) -1
(C) (A) और (B) दोनों
(D) 2

उत्तर - (C) (A) और (B) दोनों

30. कौन-सी परिमेय संख्या अपने ऋणात्मक के समान होती है ?

- (A) 1 (B) शून्य
(C) -2 (D) -1

उत्तर - (B) शून्य

31. -5 का व्युत्क्रम होगा -

- (A) $\frac{-1}{5}$ (B) $\frac{1}{5}$
(C) $\frac{-1}{-5}$ (D) $\frac{+1}{5}$

उत्तर - (A) $\frac{-1}{5}$

32. यदि x शून्य न हो तो $\frac{1}{x}$ का व्युत्क्रम होगा -

- (A) x (B) $-x$
(C) $1/x$ (D) 1

उत्तर - (A) x

33. दो परिमेय संख्याओं का गुणनफल सदैव होता है

- (A) अपरिमेय संख्या (B) परिमेय संख्या
(C) प्राकृत संख्या (D) पूर्ण संख्या

उत्तर - (B) परिमेय संख्या

34. किसी धनात्मक परिमेय संख्या का व्युत्क्रम होता है

- (A) धनात्मक
(B) ऋणात्मक
(C) (A) और (B) दोनों
(D) (A) और (B) दोनों नहीं

उत्तर - (A) धनात्मक

भिन्नों का गुणनफल -

- दी गई भिन्न में अंश को अंश से तथा हर को हर से गुणा करते हैं। पूर्णांक दिए होने पर उसे भिन्न में बदलकर गुणा करते हैं।

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} = \frac{ac}{bd}$$

भिन्नों का भाग -

- दो भिन्नों के भागफल में भाग का चिह्न गुणा में बदल देते हैं तथा आगे वाली भिन्न को उलट कर भिन्नों का गुणनफल करते हैं।

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

- भिन्नों का LCM = अंशों का ल.स./हरों का म.स.
- भिन्नों का HCF = अंशों का म.स./हरों का म.स.

दशमलव भिन्न -

- ऐसी भिन्न जिनके हर 10, 100, 1000 ... हो।
- यदि किसी भिन्न के हर में 10, 100, 1000 ... आदि हो तो उसके हर में जितने शून्य हों, अंश में दाईं ओर से उतने ही अंक गिनकर, दशमलव लगा देते हैं और हर हटा देते हैं।

साधारण भिन्न को दशमलव भिन्न में बदलना - साधारण भिन्न से दशमलव भिन्न बनाने के लिए भिन्न के अंश में हर का भाग तब तक देते हैं जब तक भाग पूरा-पूरा न चला जाए। अर्थात् शेषफल शून्य बचे।

$$\text{उदाहरण :- } \frac{2}{5} = 0.4, \frac{14}{25} = 0.56$$

दशमलव भिन्न को साधारण भिन्न में बदलना - दी गई दशमलव भिन्न को अंश में लिखें तथा हर में दशमलव बिंदु के नीचे। के साथ उतनी ही शून्य लगाये जितने दशमलव बिंदु के बाद अंक हैं। अब दशमलव बिंदु को हटाकर प्राप्त संख्या को सरलतम रूप में लिखें।

$$\text{उदाहरण :- } 0.8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$6.16 = \frac{616}{100} = \frac{154}{25}$$

नोट : दशमलव भिन्न के दायीं ओर अंत में चाहे जितने शून्य डाल दें, उसके मान में कोई फर्क नहीं आता।

$$\text{जैसे :- } 0.9 = 0.90 = 0.9000$$

यदि किसी भिन्न के अंश एवं हर दोनों में दशमलव स्थानों की संख्या समान हो तो दशमलव बिंदु को हटाया जा सकता है।

$$\text{जैसे- } \frac{0.465}{4.752} = \frac{0465}{4752} = \frac{465}{4752}$$

$$\frac{5.36985}{47.25852} = \frac{536985}{4725852}$$

नोट:- किसी पूर्णांक संख्या को भी दशमलव के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। इसके लिए पूर्णांक के बाद एक दशमलव बिंदु डालकर मनचाही शून्य लगा सकते हैं। जैसे $56 = 56.0 = 56.0000$

यदि किसी भिन्न के अंश तथा हर में दशमलव स्थानों की संख्या समान न हो तो उस संख्या के दाईं ओर शून्य लगाकर दशमलव के बाद वाले अंकों को समान बनाकर दशमलव हटा देते हैं।

$$\text{उदाहरण - } \frac{2.4}{5.64} = \frac{2.40}{5.64} = \frac{240}{564} = \frac{60}{141} = \frac{20}{47}$$

$$\frac{5.743}{6.1} = \frac{5.743}{6.100} = \frac{5743}{6100}$$

भिन्नों की तुलना - भिन्नों की तुलना करने के लिए भाग विधि या लघुतम विधि या गुणनविधि का प्रयोग करते हैं।

$$\text{उदाहरण - } \frac{2}{5}, \frac{5}{7} \text{ में से बड़ी कौनसी है ?}$$

भागविधि- इस विधि के अनुसार प्रत्येक भिन्न के अंश को उसके हर से भाग देते हैं, जिसका भागफल बड़ा होता है वही भिन्न बड़ी और जिसका भागफल छोटा होता है वह भिन्न छोटी होती है।

$$\frac{2}{5} = 0.4, \frac{5}{7} = 0.71$$

$$\text{स्पष्टतया } 0.71 > 0.4$$

$$\therefore \frac{5}{7} > \frac{2}{5}$$

$$\text{लघुतम विधि - } \frac{2}{5}, \frac{5}{7}$$

$$\frac{14}{35}, \frac{25}{35} \therefore \frac{5}{7} > \frac{2}{5}$$

गुणनविधि - वज्रगुणन विधि :- भिन्नों $\frac{a}{b}$ तथा $\frac{c}{d}$ में यदि $ad > bc$ हो तो भिन्न $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ और यदि $ad < bc$ हो तो भिन्न $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ होगी।

$$\frac{2}{5}, \frac{5}{7}$$

$$2 \times 7, 5 \times 5$$

$$14, 25$$

$$\therefore \frac{5}{7} > \frac{2}{5}$$

प्रतिशत को भिन्न में बदलना :- किसी प्रतिशत को भिन्न में बदलने के लिए प्रतिशत का चिह्न (%) हटाकर प्राप्त संख्या को 100 से भाग देते हैं।

$$40\% = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$$

भिन्न को प्रतिशत में बदलना :- किसी भिन्न को प्रतिशत में बदलने के लिए 100 से गुणा करके प्रतिशत का चिह्न (%) लगाते हैं।

$$\text{जैसे } \frac{4}{25} \text{ को प्रतिशत में बदलने पर}$$

$$\frac{4 \times 100}{25} \% = 16$$

पुनरावृत्ति वाली दशमलव भिन्न :- जब किसी संख्या में किसी अन्य संख्या का भाग देने पर भागफल में दशमलव के बाद कुछ अंक या उनके जोड़े नियमित अंतराल पर बार-बार आये तो उसे पुनरावृत्ति भिन्न कहते हैं।

उदाहरण- $\frac{14}{3} = 4.666$, अतः यहाँ 6 की पुनरावृत्ति हो रही है, यह एक पुनरावृत्ति भिन्न है इसे $4.\overline{6}$ से दर्शाते हैं।

अशांत दशमलव - यदि विभाजन के समय दशमलव के बाद शुरुआत के अंक पुनरावृत्ति न हो लेकिन बाद के अंक पुनरावृत्ति दर्शाते हैं तो ऐसी संख्याएँ अशांत आवर्ती संख्याएँ होती हैं जिन्हें परिमेय संख्या भी कहते हैं।

उदाहरण - $7.322 \dots = 7.3\overline{2}$

यदि विभाजन के वक्त दशमलव के बाद के अंक किसी भी रूप में पुनरावृत्ति नहीं दर्शाए तो ऐसी संख्याएँ अशांत अनावर्ती संख्याएँ कहलाती हैं तथा अपरिमेय होती हैं।

उदाहरण - $5.328571 \dots$

पुनरावृत्ति वाली भिन्न को साधारण भिन्न में बदलना :-

1. पुनरावृत्ति (बार) वाली दशमलव भिन्न को साधारण भिन्न में बदलने के लिए जितनी संख्याओं पर बार है तो उतने ही बट्टा में 9 लिख देते हैं।
2. दशमलव के दाईं तरफ यानी दशमलव के बाद में जितने अंको पर बार नहीं है, उतने ही 0 बट्टा में 9 के पीछे लगा देते हैं।
3. दशमलव के बाद जितने अंक पर बार नहीं हैं, उसके पूरे मान को पूरी संख्या में से घटा देते हैं और अंश के रूप में लिख देते हैं।
4. **उदाहरण :-** $0.4\overline{6}$ को साधारण भिन्न में बदलो ?

$$\text{हल :- } 0.4\overline{6} = \frac{46-4}{90} = \frac{42}{90}$$

(.: दशमलव के बाद 2 अंक हैं और एक पर बार है। अतः हर में एक 90 आया और बिना बार वाली संख्या (4) को 46 में से घटाकर अंश में लिखते हैं)

उदाहरण :- $0.01\overline{23}$ को साधारण भिन्न में बदलो ?

$$\text{हल :- } 0.01\overline{23} = \frac{123}{9990}$$

(बिना बार वाला 0 है अतः 123 में से 0 घटाने पर 123 ही आया) और तीन अंको पर बार है अतः 9 तीन बार आया है।

उदाहरण:- $7.5\overline{4}$ को साधारण भिन्न में बदलो ?

$$\text{हल :- } 7.5\overline{4} = 7\frac{54}{99}$$

(दशमलव के बाद के पूरे अंको पर बार है इसलिए घटाने के लिए कुछ नहीं होगा, अतः 54 को ही अंश में लिखेंगे)
 ∴ दो अंको पर बार है अतः हर में 9 दो बार आएगा तथा दशमलव के दाईं तरफ आयी संख्या (7) भागफल के रूप में भिन्न के आगे आयेगी।

उदाहरण :- $0.64\overline{7}$ को साधारण भिन्न में बदलो ?

$$\text{हल :- } 0.64\overline{7} = \frac{647-6}{990} = \frac{641}{990}$$

दो अंको पर बार है अतः 9 दो बार आयेगा और दशमलव के बाद एक अंक (6) पर बार नहीं है अतः हर में एक 0 आयेगा।

महत्वपूर्ण सूत्र

$$\Rightarrow 5.\overline{6} \text{ या } 5.666\dots \text{ या } 5\frac{6}{9} \text{ या } 5\frac{2}{3} \text{ या } \frac{17}{3}$$

$$\Rightarrow 2.\overline{43} \text{ या } 2.434343\dots \text{ या } 2\frac{43}{99} \text{ या } \frac{241}{99}$$

$$\Rightarrow 3.\overline{413} \text{ या } 3.413413\dots \text{ या } 3\frac{413}{999} \text{ या } \frac{3410}{999}$$

$$\Rightarrow 4.\overline{52} \text{ या } 4.52222\dots \text{ या } 4\frac{52-5}{90} \text{ या } 4\frac{47}{90} \text{ या } \frac{407}{90}$$

$$\Rightarrow 6.\overline{543} \text{ या } 6.5434343\dots \text{ या } 6\frac{543-5}{990} \text{ या } 6\frac{538}{990} \text{ या } \frac{6478}{990}$$

$$\Rightarrow 4.6\overline{145} \text{ या } 4.614545\dots \text{ या } 4\frac{6145-61}{9900} \text{ या } 4\frac{6084}{9900}$$

$$\text{या } \frac{45684}{9900}$$

अध्याय - 4

घन और घनमूल

घन (cube):-

जब किसी संख्या को उसके वर्ग से गुणा किया जाता है तो प्राप्त राशि को उसका घन कहा जाता है।

जैसे:- a का घन $= a \times a \times a$

$1^3 = 1$	$11^3 = 1331$	$21^3 = 9261$
$2^3 = 8$	$12^3 = 1728$	$22^3 = 10648$
$3^3 = 27$	$13^3 = 2197$	$23^3 = 12167$
$4^3 = 64$	$14^3 = 2744$	$24^3 = 13824$
$5^3 = 125$	$15^3 = 3375$	$25^3 = 15625$
$6^3 = 216$	$16^3 = 4096$	$26^3 = 17576$
$7^3 = 343$	$17^3 = 4913$	$27^3 = 19683$
$8^3 = 512$	$18^3 = 5832$	$28^3 = 21952$
$9^3 = 729$	$19^3 = 6859$	$29^3 = 24389$
$10^3 = 1000$	$20^3 = 8000$	$30^3 = 27000$

घन निकालने की ट्रिक :-

इन नियमों से भी आप घन निकाल सकते हैं :-

$$(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2$$

जैसे- 4 का घन निकालने के लिए $= 3+1$ मानें
यहां $x=3$, $y=1$

$$= 3^3 + 1^3 + 3 \times 3^2 \times 1 + 3 \times 3 \times 1^2$$

$$= 27 + 1 + 3 \times 9 + 9 \times 1$$

$= 28 + 27 + 9 = 64$ ans. यह चार का घन है, आप इस तरह से निकाल सकते हैं।

$$(x-y)^3 = x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2$$

जैसे- 2 का घन निकालने के लिए
 $= 4-2$ मानें

यहां $x=4$, $y=2$

$$= 4^3 - 2^3 - 3 \times 4^2 \times 2 + 3 \times 4 \times 2^2$$

$$= 64 - 8 - 3 \times 32 + 3 \times 16$$

$$= 56 - 96 + 48$$

$$= 106 - 96 = 10$$
 ans. यह दो का घन है।

दशमलव संख्याओं का घन निकालना :-

जैसे-

Ex-1 $(0.2)^3 = 2/10 \times 2/10 \times 2/10$
 $= 8/1000 = 0.008$ ans.

Ex-2 $(0.5)^3 = 5/10 \times 5/10 \times 5/10$
 $= 125/1000 = 0.125$ ans.

घनमूल :-

यदि कोई संख्या x हो, तो उसका घनमूल $\sqrt[3]{x}$ होता है और यदि x के समान तिन गुणज यानि $x \times x \times x$ हो, तो इनका घनमूल भी $\sqrt[3]{x}$ ही होता है।

1 से 100 तक घनमूल :-

$\sqrt[3]{1}$	1	$\sqrt[3]{132,651}$	51
$\sqrt[3]{8}$	2	$\sqrt[3]{140,608}$	52
$\sqrt[3]{27}$	3	$\sqrt[3]{148,877}$	53
$\sqrt[3]{64}$	4	$\sqrt[3]{157,464}$	54
$\sqrt[3]{125}$	5	$\sqrt[3]{166,375}$	55
$\sqrt[3]{216}$	6	$\sqrt[3]{175,616}$	56
$\sqrt[3]{343}$	7	$\sqrt[3]{185,193}$	57
$\sqrt[3]{512}$	8	$\sqrt[3]{195,112}$	58
$\sqrt[3]{729}$	9	$\sqrt[3]{205,379}$	59
$\sqrt[3]{1,000}$	10	$\sqrt[3]{216,000}$	60
$\sqrt[3]{1,331}$	11	$\sqrt[3]{226,981}$	61
$\sqrt[3]{1,728}$	12	$\sqrt[3]{238,328}$	62
$\sqrt[3]{2,197}$	13	$\sqrt[3]{250,047}$	63
$\sqrt[3]{2,744}$	14	$\sqrt[3]{262,144}$	64
$\sqrt[3]{3,375}$	15	$\sqrt[3]{274,625}$	65
$\sqrt[3]{4,096}$	16	$\sqrt[3]{287,496}$	66
$\sqrt[3]{4,913}$	17	$\sqrt[3]{300,763}$	67
$\sqrt[3]{5,832}$	18	$\sqrt[3]{314,432}$	68
$\sqrt[3]{6,859}$	19	$\sqrt[3]{328,509}$	69
$\sqrt[3]{8,000}$	20	$\sqrt[3]{343,000}$	70
$\sqrt[3]{9,261}$	21	$\sqrt[3]{357,911}$	71
$\sqrt[3]{10,648}$	22	$\sqrt[3]{373,248}$	72
$\sqrt[3]{12,167}$	23	$\sqrt[3]{389,017}$	73
$\sqrt[3]{13,824}$	24	$\sqrt[3]{405,224}$	74
$\sqrt[3]{15,625}$	25	$\sqrt[3]{421,875}$	75
$\sqrt[3]{17,576}$	26	$\sqrt[3]{438,976}$	76
$\sqrt[3]{19,683}$	27	$\sqrt[3]{456,533}$	77
$\sqrt[3]{21,952}$	28	$\sqrt[3]{474,552}$	78
$\sqrt[3]{24,389}$	29	$\sqrt[3]{493,039}$	79
$\sqrt[3]{27,000}$	30	$\sqrt[3]{512,000}$	80
$\sqrt[3]{29,791}$	31	$\sqrt[3]{531,441}$	81
$\sqrt[3]{32,768}$	32	$\sqrt[3]{551,368}$	82

$\sqrt[3]{35,937}$	33	$\sqrt[3]{571,787}$	83
$\sqrt[3]{39,304}$	34	$\sqrt[3]{592,704}$	84
$\sqrt[3]{42,875}$	35	$\sqrt[3]{614,125}$	85
$\sqrt[3]{46,656}$	36	$\sqrt[3]{636,056}$	86
$\sqrt[3]{50,653}$	37	$\sqrt[3]{658,503}$	87
$\sqrt[3]{54,872}$	38	$\sqrt[3]{681,472}$	88
$\sqrt[3]{59,319}$	39	$\sqrt[3]{704,969}$	89
$\sqrt[3]{64,000}$	40	$\sqrt[3]{729,000}$	90
$\sqrt[3]{68,921}$	41	$\sqrt[3]{753,571}$	91
$\sqrt[3]{74,088}$	42	$\sqrt[3]{778,688}$	92
$\sqrt[3]{79,507}$	43	$\sqrt[3]{804,357}$	93
$\sqrt[3]{85,184}$	44	$\sqrt[3]{830,584}$	94
$\sqrt[3]{91,125}$	45	$\sqrt[3]{857,375}$	95
$\sqrt[3]{97,336}$	46	$\sqrt[3]{884,736}$	96
$\sqrt[3]{103,823}$	47	$\sqrt[3]{912,673}$	97
$\sqrt[3]{110,592}$	48	$\sqrt[3]{941,192}$	98
$\sqrt[3]{117,649}$	49	$\sqrt[3]{970,299}$	99
$\sqrt[3]{125,000}$	50	$\sqrt[3]{1,000,000}$	100

घनमूल निकलने की विधि: घनमूल मुख्यतः दो प्रकार से निकाले जाते हैं जो इस प्रकार हैं।

- गुणनखंड विधि एवं
- भाग विधि

घनमूल ज्ञात करने के कुछ ट्रिक्स :-

घनमूल ज्ञात करने के लिए 10, 20, 30..... आदि के घन की संख्या को आधार संख्या माना जाता है।

आधार संख्या = 1000, 8000, 27000, 64000..... आदि।

विधि :-

सर्वप्रथम दी गई संख्या का निकटतम आधार संख्या ज्ञात करे।

आधार संख्या के घनमूल में से दी गई संख्या का अंतिम अंक घटाए या जोड़े, प्राप्त संख्या अभीष्ट घनमूल होगा।

Note:-

यदि दी गई संख्या जिसका घनमूल हमें निकालना है का इकाई अंक 5 से बड़ा है तो हम आधार संख्या के घनमूल में दी गई संख्या के घनमूल में दी गई संख्या की आधार संख्या से बड़े या छोटे होने के अनुसार जोड़ या घटा देंगे। प्राप्त संख्या अभीष्ट घनमूल होगा।

सूत्र:- आधार संख्या का घनमूल + दी गई संख्या का अंक

जैसे:- 46656 का घनमूल

- आधार संख्या = 27000 का घनमूल = 30
- 6 का घन = 216
- इसलिए घनमूल = 30 + 6 = 36

किसी संख्या के घनमूल का इकाई अंक निकालना :-

जिस संख्या के इकाई अंक के स्थान पर 0,1,4,5,6,9 रहे उनके घनमूल के इकाई स्थान पर भी वही अंक होगा।

जैसे- 10 का घनमूल = 1000

11 का घनमूल = 1331

4 का घनमूल = 64

5 का घनमूल = 125

6 का घनमूल = 216

9 का घनमूल = 729

यहां इन सब के घनमूल का इकाई अंक वही है जो इनकी संख्या का है।

जिस संख्या का इकाई अंक 2 उसके घनमूल के इकाई का अंक 8 होगा और जिसका इकाई अंक 8 उसके घनमूल के इकाई अंक 2 होगा।

जैसे -2 का घनमूल = 8 और 8 का घनमूल = 512, यहां जिसका इकाई अंक 2 है उसके घनमूल का इकाई अंक 8 और जिसका इकाई अंक 8 है उसके घनमूल का इकाई अंक 2 है।

इसी तरह जिस संख्या का इकाई अंक 3 उसके घनमूल का इकाई अंक 7 होगा और जिसका इकाई अंक 7 उसके घनमूल का इकाई अंक 3 होगा।

जैसे- 3 का घनमूल = 27 और

7 का घनमूल = 343 .

भाग विधि से घनमूल ज्ञात करना :-

Q.1 68921

हल:

भाग विधि से-

क्रियापद ↓	41
$- 4^3$	068921
	-64
$- 3 \times 4^2 \times 1$	49
	-48
$- 3 \times 4 \times 1^2$	12
$\times 1^2$	-12
$- 1^3$	01
	- 01
	x

अतः 68921 का घनमूल = 41



Q.11 $2x^2 + 3$ में क्या जोड़ा जाए कि $(x + 1)$ से पूर्णतः विभाजित हो जाए ?

$$\text{हल} \rightarrow x + 1 = 0, \therefore x = -1$$

x का मान रखने पर

$$\Rightarrow 2(-1)^2 + 3 = 2 + 3$$

$$\Rightarrow 5$$

अतः -5 जोड़ने पर पूर्णतः विभाजित होगी।

Q.12 $3x^3 - 2x + 1$ में क्या जोड़ा जाए कि $(x + 2)$ से पूर्णतः विभाजित हो जाए ?

$$\text{हल} \rightarrow x + 2 = 0, \therefore x = -2$$

x का मान रखने पर

$$\Rightarrow 3(-2)^3 - 2(-2) + 1$$

$$\Rightarrow 3 \times (-8) + 4 + 1$$

$$\Rightarrow -24 + 4 + 1 = -19$$

अतः 19 जोड़ने पर पूर्णतः विभाजित होगी।

Q.13 रैखिक बहुपद $3x - 2$ में शून्यंक है ?

$$\text{हल} \rightarrow 3x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 3x = 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

Q.14 बहुपद $p(x) = x^2 - 2x - 8$ के शून्यंक हैं -

$$\text{हल} \rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 2x - 8 = 0$$

$$\Rightarrow x(x - 4) + 2(x - 4) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 4)(x + 2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 4, x = -2$$

बीजीय गुणनखंड:-

किसी बहुपद का वह टुकड़ा जो उस बहुपद को पूर्णतः विभाजित कर दे तथा शेष शून्य रहे गुणनखंड कहलाता है। जब गुणनखंड छोटे से छोटा हो तो वह अभिव्यक्त गुणनखंड कहलाता है।

बीजीय व्यंजकों के गुणनखंड ज्ञात करने की विधियाँ :-

उभयनिष्ठ विधि :- $12a^2b + 15ab^2$ के गुणनखंड निकालो।

$$12a^2b \text{ के अभिव्यक्त गुणनखंड} = 2 \times 2 \times 3 \times a \times a \times b$$

$$15a^2b \text{ के अभिव्यक्त गुणनखंड} = 3 \times 5 \times a \times b \times b$$

दोनों में उभयनिष्ठ 3, a , b हैं अतः एक अभिव्यक्त गुणनखंड $3ab$ है।

समूहन विधि :- इस विधि में दो के समूह बनाकर उभयनिष्ठ लिया जाता है।

$$\text{उदाहरण :- } xm^2 + ym^2 + xn^2 + yn^2$$

$$\boxed{xm^2 + ym^2}$$

$$\boxed{xn^2 + yn^2}$$

प्रथम समूह

दूसरा समूह

$$= m^2(x + y) + n^2(x + y)$$

$$= (x + y)(m^2 + n^2)$$

उदाहरण :- $12xy + 4x + 6y + 2$ के गुणनखंड कीजिये।

$$\boxed{12xy + 4x}$$

$$\boxed{6y + 2}$$

प्रथम समूह

दूसरा समूह

$$= 2x(6y + 2) + 1(6y + 2)$$

$$= (6y + 2)(2x + 1)$$

Note:- ध्यान रखे कि प्रथम समूह का कॉमन के बाद शेष बचा व दूसरे समूह का कॉमन के बाद शेष बचा समान होना चाहिए।

बीजीय गुणनखंड के महत्वपूर्ण उदाहरण :-

$$\text{Ex - (1) } 12 = 3 \times 4$$

$$(2) x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$$

$$(3) P(x) = x^5 - x^3 + 69x^2 - 20x + 16$$

$$= (x^3 + 4x^2 - x + 1)(x^2 - 4x + 16)$$

Example-1 $x^2 + 6x + 8$ का गुणनखंड ज्ञात करो!

$$= x^2 + 4x + 2x + 8 = 0$$

$$x(x + 4) + 2(x + 4)$$

$$= (x + 2)(x + 4)$$

$$x = -2, x = -4$$

Example-2 $2x^2 + 6x - 20$ का गुणनखंड निकालो!

$$= 2x^2 + 6x - 20 = 0$$

$$= 2x^2 + 10x - 4x - 20 = 0$$

$$2x(x + 5) - 4(x + 5)$$

$$(2x - 4)(x + 5)$$

$$x = \frac{4}{2}, x = -5$$

गुणनखंड के विस्तार में पदों की संख्या

$$(a+b)^n = (n+1) \text{ पद}$$

$${}^nC_0 a^n + {}^nC_1 a^{n-1} b + \dots + {}^nC_n b^n$$



अध्याय - 10

लाभ और हानि

- (1) **क्रय मूल्य (cp)** :- जिस मूल्य पर कोई वस्तु खरीदी जाती है वह उस वस्तु का क्रय मूल्य कहलाता है।

क्रय मूल्य = विक्रय मूल्य - लाभ

Note - $SP > CP$ = लाभ

- (2) **विक्रय मूल्य (sp)** :- जिस मूल्य पर कोई वस्तु बेची जाती है उसे उस वस्तु का विक्रय मूल्य कहते हैं।

विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य + लाभ

Note - $SP < CP$ = हानि

Sale price (SP) = विक्रय मूल्य

Profit (P) = लाभ

Mark Price (m.p) = अंकित मूल्य

CP = क्रय मूल्य

Loss (L) = हानि

Discount(D) = बट्टा / छूट

$P = SP - CP$, $P\% = \frac{P}{CP} \times 100$

$Loss = CP - SP$, $L\% = \frac{L}{CP} \times 100$

$SP = CP \times \frac{100 \pm \text{लाभ / हानि}}{100}$

$CP = sp \times \frac{100}{100 \pm \text{लाभ / हानि}}$

Discount = अंकित मूल्य (MP) - विक्रय मूल्य (SP)

$D\% = \frac{D}{MP \times 100}$ $ISP = \frac{MP \times (100 - D)}{100}$

$MP = \frac{SP \times 100}{(100 - D)}$

$\frac{CP \times (100 + P)}{100} = \frac{MP \times (100 - P)}{100} = \frac{CP}{MP} = \frac{100 - P}{100 + P}$

CP MP

100 - D 100 + D

Type-1 = साधारण प्रश्न :-

- (1) एक पुस्तक का क्रय मूल्य 110 Rs तथा विक्रय मूल्य 123.20 Rs है इसे बेचने पर पुस्तक विक्रेता को कितने % लाभ होगा ?

लाभ (P) = SP - CP

= 123.20 - 110

= 13.20

= $\frac{13.20}{110} \times 100 = 12\%$ ans.

<https://www.infusionnotes.com/>

- (2) एक साइकिल को 1960 Rs में खरीदकर Rs 1862 में बेचे जाने पर कितने % हानि होगी ?

हानि (loss) = CP - SP

= 1960 - 1862 = 98

$L\% = \frac{L}{CP} \times 100$

= $\frac{98}{1960} \times 100$

= 5 % ans.

- (3) एक कुर्सी को 873 Rs में बेचने पर विक्रेता को 10% हानि होती है। कुर्सी का क्रय - मूल्य है ?

10% = 1/10L

SP = CP - L

= 10 - 1

970 Rs

9 = 873, 1 = 97

10 = 97 × 10

CP = 970 Rs

Type - 2 - जब कोई वस्तु दो बार बेची जाये

- (1) एक घड़ी को 2880 Rs में बेचने पर विक्रेता को 10% हानि होती है वह इसे कितने में बेचे कि उसे 5% लाभ हो ?

दूसरी बार का विक्रय मूल्य = पहली बार का विक्रय मूल्य × (100 + दूसरा%) / (100 + पहला%)

= 2880 × (100 + 5) / 100 - 10

= 2880 × 105 / 90

= 32 × 105

दूसरी बार का विक्रय मूल्य = 3360 Rs

2 Method

माना CP = 100

100

90 = 2880

-10%

5%

1 = 32

105 = 32 × 105 = 3360 Rs

(SP) 1

90

105

- (2) एक दुकानदार ने एक साइकिल 10% हानि पर बेची. वह साइकिल को कितने RS में बेचता कि उसे 19% की हानि होती हो ? यदि 10% हानि पर विक्रय मूल्य Rs 1200 हो.

माना CP = 100

100

90 = 1200

-10%

-19%

81 = 1200 × $\frac{81}{90}$

= 1080 Rs.

90

81



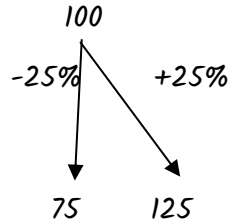
- (3) एक कुर्सी को Rs 720 में बेचने पर दुकानदार को 25% हानि होती है। वह कुर्सी को कितने Rs में बेचे कि उसे इस पर 25% लाभ हो ?

CP = 100 (माना)

$$75 = 720 \text{ Rs}$$

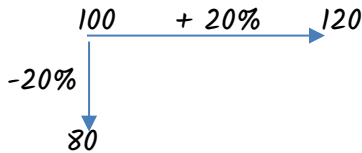
$$125 = \frac{720}{75} \times 125$$

$$= 1200 \text{ Rs}$$



- (4) 20 वस्तुओं को Rs 160 में बेचने पर एक व्यक्ति को 20% हानि हो जाती है तदनुसार 20% लाभ कमाने के लिये उस व्यक्ति को 240 Rs में कितनी वस्तुएँ बेचनी चाहिए

Let CP = 100



$$80 = 160$$

$$1 = 2$$

$$120 = 120 \times 2$$

20 वस्तुओं का SP = 240 Rs

240Rs में 20 वस्तुएँ बेची जाये।

Type - 3 जब एक वस्तु कई बार खरीदी या बेची जाये -

- (1) राम ने एक साईकिल Rs 1000 में खरीदी और 20% का लाभ लेकर उसे श्याम को बेच दिया। श्याम ने 10% का घाटे में उसे मोहन को बेच दिया। बताइए मोहन ने साईकिल कितने Rs में खरीदी ?

$$20\% = \pm \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$$

$$10\% = \frac{-1}{10} = \frac{9}{10}$$

माना मोहन ने x Rs में खरीदी

$$1000 \times \frac{6}{5} \times \frac{9}{10} = x$$

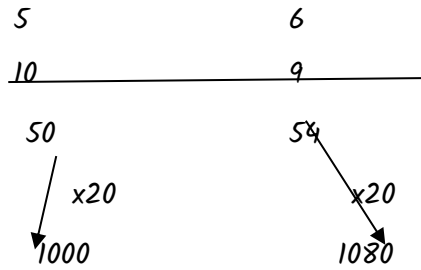
$$x = 1080 \text{ Rs}$$

2 Method

$$20\% = \frac{1}{5}$$

$$10\%$$

प्रारम्भिक मूल्य अंकिता मूल्य



मोहन ने 1080 में खरीदी !

- (2) A ने कोई वस्तु B को 25% लाभ पर, B ने वह वस्तु C को 20% लाभ पर तथा C ने D को 10% लाभ पर बेची ! यदि D ने इसे Rs 330 Rs में खरीदी हो, तो A ने उसे कितने में खरीदा ?

$$25\% = 5/4 \text{ छूट}$$

$$20\% = \frac{6}{5}$$

$$10\% = 11/10$$

$$A \times \frac{5}{4} \times \frac{6}{5} \times \frac{11}{10} = 330$$

$$A \times \frac{33}{20} = 330$$

$$A = 200 \text{ Rs}$$

- (3) A ने एक वस्तु 10% लाभ पर B को 10% हानि पर C को तथा C ने 20% लाभ पर D को बेचा ! यदि D सामान को Rs 8000 में खरीदा हो तो बताओ A ने उसे कितने में खरीदा था ?

$$10\% = \pm \frac{1}{10} + 1 = \frac{11}{10}$$

$$10\% = -1/10 - 1 = \frac{9}{10}$$

$$20\% = +1/5 + 1 = \frac{6}{5}$$

$$A \times \frac{11}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{6}{5} = 8000$$

$$A = 6734 \text{ Rs}$$

- (4) A ने एक वस्तु खरीदी B को 25% लाभ पर बेची ! फिर B ने उसे 10% हानि पर बेचा इसके लिये C ने Rs 675 का भुगतान किया तदनुसार, A ने उसे कितना Rs में खरीदा था ?

$$A \times \frac{5}{4} \times \frac{9}{10} = 675$$

$$A \times 45 = 675 \times 40$$

$$A = 600 \text{ Rs ans.}$$



$$\text{पुराना भाव} = \frac{440}{22} = 20 \text{ Rs 1 kg}$$

- (4) किसी सामान की कीमत 20 % कम हो गयी अब ग्राहक को वह सामान 240 Rs में 6 kg अधिक मिलता है सामान का नया भाव ज्ञात कीजिए !

$$\text{नया भाव} = \frac{\text{कीमत} \times \% \text{ वृद्धि} / \text{कमी}}{\text{मात्रा} \times 100}$$

$$= \frac{240 \times 20}{6 \times 100}$$

$$= 8 \text{ Rs 1 kg}$$

2 Method

$$20 \% = -1/5$$

$$1 \rightarrow 6 \text{ kg}$$

$$5 \rightarrow 5 \times 6$$

$$= 30$$

$$\text{भाव} = \frac{240}{30}$$

$$= 8 \text{ Rs 1 kg}$$

Type - 8 जब प्रतिशत लाभ/हानि क्रय मूल्य के संख्यात्मक मान के बराबर हो -

- (1) किसी वस्तु को 24 Rs में बेचने पर होने वाले लाभ % का संख्यात्मक मान क्रय मूल्य के बराबर है ! तो वस्तु का क्रय मूल्य बताओ !

$$\text{क्रय मूल्य} = 10 \times \sqrt{25 + \text{विक्रय मूल्य} - 50}$$

$$CP = 10 \times \sqrt{25 + 24 - 50}$$

$$= 10 \times \sqrt{49} - 50$$

$$= 10 \times 7 - 50$$

$$= 70 - 50$$

$$= 20 \text{ Rs}$$

Note - ऐसे प्रश्नों में विक्रय के ऐसे दो गुणखंड का पता लगाना है जिनका योग/अंतर 10 हो ! उसके गुणखंड में 10 से गुना करे ! सबसे छोटा गुणखंड वस्तु का क्रय मूल्य होगा !

- (2) किसी वस्तु को 11 Rs में बेचने पर होने वाले लाभ % का संख्यात्मक मान वस्तु के क्रय मूल्य के बराबर है वस्तु का क्रय मूल्य है ?

$$CP = 10 \times \sqrt{25 + \text{विक्रय मूल्य} - 50}$$

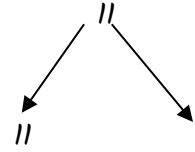
$$= 10 \times \sqrt{25 + 11 - 50}$$

$$= 10 \times 6 - 50$$

$$= 60 - 50$$

$$CP = 10 \text{ Rs}$$

2 Method

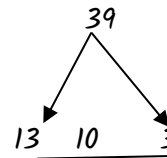


$$11 \times 10 = 110$$

$$10 \times 1 = 10$$

$$CP = 10 \text{ Rs}$$

- (3) किसी वस्तु को 39 Rs में बेचने पर होने वाले लाभ % का संख्यात्मक मान क्रय मूल्य के बराबर है ! तो वस्तु का क्रय मूल्य बताओ !

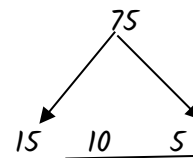


$$13 \times 10 = 130$$

$$3 \times 10 = 30$$

$$CP = 30$$

- (4) किसी वस्तु को 75 Rs में बेचने पर होने वाले लाभ % का मान क्रय मूल्य के बराबर है तो वस्तु का क्रय मूल्य क्या होगा ?



$$15 \times 10 = 150$$

$$5 \times 10 = 50$$

$$CP = 50 \text{ Rs}$$

Type - 9 जब क्रय मूल्य और विक्रय मूल्य दोनों ही बढ़ाये या घटाये जाये

- (1) एक व्यापारी अपना सामान 30 % लाभ पर बेचता है ! यदि वह 20 % कम पर सामान खरीदता और उसे 40 % लाभ पर बेचता तो उसे 144 Rs कम मिलते ! सामान का क्रय मूल्य बताओ !

$$\text{माना } CP = 100$$

$$h = \frac{28}{3} \text{ cm जहाँ } h \text{ तार की लम्बाई है !}$$

(7) किसी गोले का पृष्ठ क्षेत्रफल S तथा आयतन V है ! $\frac{S^3}{V^2}$ का मान ज्ञात करें ?

$$\text{पृष्ठ क्षे. (S)} = 4\pi r^2$$

$$\text{आयतन (V)} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{S^3}{V^2} = \frac{64\pi^3 r^6}{\frac{16}{9}\pi^2 r^6}$$

$$= \frac{64 \times 9}{16} \pi = 36 \pi \text{ unit}$$

अध्याय - 19

सांख्यिकी

प्राथमिक समकों के संग्रहण की रीतियाँ (Method of Collecting Primary Data)

1. प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसंधान (Direct Personal Investigation)
2. अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसन्धान (Indirect Oral Investigation)
3. स्थानीय स्रोतों अथवा संवाददाताओं द्वारा सूचना प्राप्ति ! (Information Through Local Sources और Correspondents)
4. गणकों के माध्यम से सूचना संग्रह ! (Information Through Enumeration)
5. प्रश्नावली के माध्यम से सूचना संग्रह ! (Information Through Questionnaire)

द्वितीयक समकों के संग्रहण के स्रोत (Sources of Collection of Secondary Data)

द्वितीय समंक वे समंक हैं जो पहले से ही किसी व्यक्ति, संस्था या सरकार द्वारा संग्रहित किये जाते हैं !

द्वितीयक समकों के प्रमुख स्रोत :-

- (1) प्रकाशित सामग्री (Published Material):-
 - (i) सरकारी प्रकाशन !
 - (ii) अन्तर्राष्ट्रीय तथा आयोगों की रिपोर्ट !
 - (iii) व्यापारिक संस्थाओं द्वारा !
 - (iv) शोधकर्ताओं के प्रकाशन !
 - (v) पत्र - पत्रिकाओं में प्रकाशित सामग्री !
- (2) अप्रकाशित सामग्री (Unpublished Material):- कुछ समंक ऐसे भी होते हैं जिनका सरकार, संस्थाओं अथवा व्यक्तियों के द्वारा संकलन तो किया जाता है किन्तु उनका प्रकाशन नहीं किया जाता है ! यदि ये समंक उपलब्ध हो तो इनका उपयोग द्वितीयक सामग्री के रूप में किया जाता है !

चरों का अर्थ (Meaning of Variables)

संख्यात्मक वर्गीकरण में चरों का महत्वपूर्ण स्थान है ! सांख्यिकीय विधियों में चरों का तात्पर्य किसी भी मापने योग्य मात्रा से है जो निश्चित सीमाओं के अन्तर्गत कोई भी मूल्य ग्रहण कर सकती है ! अर्थात् चर एक ऐसी राशि है जिसका मूल्य अलग - अलग स्थितियों में बदलता रहता है ! जो मात्रा तथा आकार में घटते बढ़ते रहते हैं चर कहलाते हैं !

उदाहरण के लिए - आय, मजदूरी, वजन, परिवार का आकार, आयात - निर्यात आदि !

चरों के प्रकार (Kinds of Variables):- चर दो प्रकार के होते हैं - खण्डित चर, सतत चर !

1. **खण्डितचर (Discrete Variable):-** जो चर एक-दूसरे से निश्चित मात्रा में भिन्न होते हैं, खण्डित चर कहलाते हैं ! व्यावहारिक दृष्टी से खण्डित चर पूर्णांकों में ही हो सकते हैं !

इस प्रकार गणना अथवा गिनती करके जो मूल्य प्राप्त किये जाते हैं !

2. **सतत चर (Continuous Variable) :-** सतत चर वह चर है जिसका निश्चित सीमाओं के अन्तर्गत कोई भी मूल्य हो सकता है ! इस प्रकार जिन चरों को निश्चित मूल्यों में मापना सम्भव न हो तथा दो मूल्यों के मध्य अनगिनत मूल्य हो सकते हो ऐसे चरों को सतत चर कहते हैं ! अर्थात् जिन मूल्यों का माप किया जाता है उन्हें सतत चर कहते हैं ! जैसे - तापमान, ऊँचाई, आयु, आय, वजन, उत्पादित पुर्जे आदि !

सांख्यिकीय श्रेणियाँ (Statistical Series) :- सांख्यिकीय श्रेणियाँ समकों के वर्गीकरण से प्रत्यक्ष रूप से सम्बन्धित हैं !

संख्यात्मक आधार पर श्रेणियाँ (Series based Quantitative Values)

1. **व्यक्तिगत श्रेणी (Individual series)**

आवृत्ति बंटन श्रेणी (Frequency Distribution Series):-

(i) खण्डित श्रेणी (Discrete Series और Ungrouped Frequency Distribution)

(ii) सतत श्रेणी (Continuous Series और Grouped Frequency Distribution)

विचर (Variable) :- प्रेक्षण से हम जिस राशि का अलग-अलग मान ग्रहण करते हैं उस राशि को विचर कहा जाता है !

बारम्बारता (Frequency) :- यदि आँकड़ों के संकलन में कोई आकड़ा 6 बार आया हो तो उस 6 को उस आकड़े की बारम्बारता कहते हैं !

पराम्पर (Range) :- किसी प्रेक्षण से महतम और न्यूनतम आँकड़ों के अन्तर को पराम्पर कहा जाता है !

वर्ग - अन्तराल या वर्ग (Class interval or Class) :- जब आँकड़ें कई वर्गों में बाँटकर व्यक्त किये जाते हैं तो प्रत्येक वर्ग, वर्ग - अन्तराल या सिर्फ वर्ग कहलाता है ! वर्ग अन्तराल बनाने की दो विधियाँ हैं -

(i) समावेशिक (Non-overlapping Method)

(ii) अपवर्जी (Overlapping Method)

समावेशिक विधि में वर्ग अन्तराल 0-9, 10-19, 20-29, 30-39 इत्यादि प्रकार से लिए जाते हैं ! यहाँ 10-19 वर्ग-अन्तराल का यह अर्थ हुआ कि उसमें 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 और 19 तक के ही आँकड़ें उसी वर्ग - अन्तराल में रहेंगे !

अपवर्जी विधि में वर्ग - अन्तराल 0-10, 10-20, 20-30, 30-40, 40-50 इत्यादि प्रकार से लिए जाते हैं ! यहाँ 10-20 वर्ग-अन्तराल का यह अर्थ हुआ कि उसमें 10 से

19 तक के ही आँकड़ें शामिल किए जायेंगे ! 20 की गिनती अगले वर्ग अन्तराल (20-30) में की जायेगी !

यदि वर्ग-अन्तराल समावेशिक विधि में लिखा हो तो उसे अपवर्जी विधि में बदला जा सकता है ! उदाहरणार्थ निम्नलिखित वर्ग अन्तराल समावेशिक विधि में लिखा गया है ! जिसे अपवर्जी विधि में बदलना है ! जैसे- 0-9, 10-19, 20-29, 30-39, 40-49

इसे अपवर्जी विधि में बदलने के लिए प्रत्येक वर्ग-अन्तराल की निम्नतम सीमा में से 0.5 घटा दें तथा उच्चतम सीमा में 0.5 जोड़ दें ! ऐसा करने से वर्ग अन्तराल अपवर्जी विधि में बदल जायेगा ! जैसे -

-0.5-9.5, 9.5-19.5, 19.5-29.5, 29.5-39.5, 39.5-49.5

मध्यमान :- किसी वर्ग की उच्चतर व निम्नतर सीमाओं का औसत = $\frac{H+L}{2}$

संचयी बारम्बारता (Cumulative Frequency) :-

किसी वर्ग - अन्तराल की संचयी बारम्बारता इस वर्ग - अन्तराल और उसके पहले के वर्ग - अन्तरालों की बारम्बारताओं का योग होता है !

वर्गीकृत आँकड़ों की बारम्बारता सारणी द्वारा प्रस्तुतिकरण

निम्नलिखित आँकड़ें किसी परीक्षा में विभिन्न परीक्षार्थियों का गणित विषय में प्राप्तांक हैं-

20, 92, 90, 74, 80, 75, 95, 74, 65, 85, 65, 90, 88, 75, 87, 74, 65, 70, 20, 88, 95, 85, 70, 35, 45, 80, 70, 88, 85, 80

क्रिया :-

(i) सभी आँकड़ों को ध्यानपूर्वक देखें तथा इसमें न्यूनतम तथा अधिकतम आँकड़ों को चुनें जो क्रमशः 20 तथा 95 हैं !

(ii) अब संख्याओं का वर्ग अन्तराल तैयार करें ! इसके लिए पहले वर्ग अन्तराल की न्यूनतम सीमा 20 या उससे कम लें ! वर्ग-अन्तराल की लम्बाई अपनी इच्छानुसार ली जा सकती है जो प्रायः 5, 10 या 20 होती है !

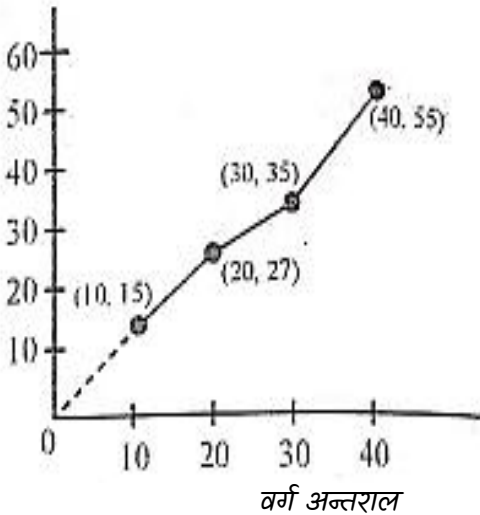
20-30, 30-40, 40-50 इत्यादि अपवर्जी विधि में

20-29, 30-39, 40-49 इत्यादि समावेशिक विधि में

(iii) दिए गए आँकड़ों से एक-एक आकड़ा लेकर यह पता लगाएँ कि वह आकड़ा किस वर्ग-अन्तराल में है ! जिस वर्ग-अन्तराल में वह आकड़ा है, उसके दाँयी ओर टेलीमार्क के स्तम्भ में एक चिह्न । लगा दें ! इस प्रकार यदि प्रत्येक अन्तराल चार चिह्न ॥॥ हो जाये तो पांचवे चिह्न के लिए इसे क्रॉस कर दें (X) !

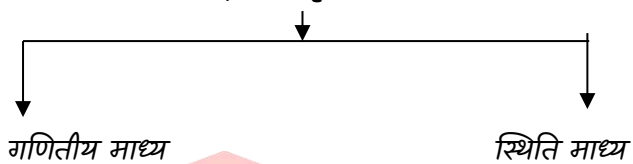
(iv) बारम्बारता स्तम्भ के नीचे प्रत्येक टेली मार्क को गिनकर लिख दें !

(v) अन्त में बारम्बारताओं को जोड़कर कुल संख्या लिख दें तथा सारणी का एक उपयुक्त शीर्षक दें -



केन्द्रीय प्रवृत्ति की मापें (Measurement of Central Tendency)-

केन्द्रीय प्रवृत्ति में माप



(A) गणितीय माध्य :-

1. सर्वोत्तम माप

समान्तर माध्य (Arithmetic Mean)	गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean)	हरात्मक माध्य (Harmonic Mean)
यह माध्य विशेष रूप से वहाँ ज्यादा उपयोगी है जहाँ सभी इकाइयों को समान महत्व देना हो ! सामाजिक व आर्थिक समस्याओं के अध्ययन के लिए समान्तर माध्य उपयोगी है ! जैसे - औसत उत्पादन , औसत आयात व निर्यात , औसत उत्पादन , औसत आयात व निर्यात , औसत उत्पादन - व्यय , औसत आमदनी , औसत लागत, औसत मूल्य , औसत वर्षा , औसत वेतन औसत खाद्यान्न का उपभोग आदि!	जहाँ श्रेणी के मूल्यों में अत्यधिक असमानता हो या तथ्यों में होने वाले सापेक्षिक परिवर्तनों का अध्ययन करना हो वहाँ इस माध्य का प्रयोग उचित है ! जैसे - अनुपातों , प्रतिशतों व चक्रवृद्धि दरों की औसत , गुणोत्तर माध्य द्वारा ही निकली जाती है ! सूचकांकों की रचना , जनसंख्या की वृद्धि दर ज्ञात करने के लिए भी गुणोत्तर माध्य उपयुक्त है ! श्रेणी में अधिक विचलन होने पर भी यह माध्य उपयुक्त रहता है !	इस माध्य का उपयोग समय, दर अथवा मूल्यों से सम्बन्धित तथ्यों की जानकारी के लिए अधिक उपयुक्त है ! जब सबसे छोटे मूल्यों को अधिक महत्व देना हो तो भी हरात्मक माध्य का प्रयोग उचित रहता है !

वर्गीकृत आँकड़ों की व्याख्या (Interperation of Categorized Data)

दैनिक जीवन की अधिकांश परिस्थितियों में आकड़े इतने बड़े होते हैं कि उनका अर्थपूर्ण अध्ययन करने के लिए उन्हें समूहों में बाँटकर छोटा किया जाता है ! ऐसे आँकड़ों के समूह को वर्गीकृत आकड़े कहते हैं !

1. माध्य (Mean)

केन्द्रीय प्रवृत्ति का अधिकतर प्रयोग होने वाला मापक है , क्योंकि यह प्रेक्षकों पर आधारित होता है तथा दोनों चरम

- औसत ज्ञात करने के लिए
- पद विचलनों का योग हमेशा शून्य होता है !
- पद विचलनों के वर्गों का योग न्यूनतम होता है !
- चरम मूल्यों से अत्यधिक प्रभावित होता है !
- संख्याओं का बीजीय विवेचन सम्भव

(B) गुणोत्तर माध्य (GM):- 1. वृद्धि दर ज्ञात करने के लिए !

2. सूचकांक ज्ञात करने के लिए !

(C) हरात्मक माध्य (HM) :-

1. समय, चाल, दूरी , गति आदि का पता लगाने के लिए !

2. स्थिति माध्य :- (A) माध्यिका (Median)

(A) माध्यिका (Median):-

1. गुणात्मक तथ्यों की जानकारी हेतु !

2. श्रेणी का मध्यम मान

3. C.F. वक्र

(B) बहुलक (Mode) :-

1. भविष्यवाणी के लिए !

2. पूर्वानुमान के लिए जैसे - मौसम , वर्षा , तापमान!

मानों के बीच स्थित होता है ! यह हमें दो या अधिक दिए हुए बंटनों की तुलना करने में सहायक है !

समान्तर माध्य के गुण व दोष (Merits & Demerits of arithmetic Mean)

गुण (Merits)

- इसकी गणना करना सरल है !
- यह सभी पदों पर आधारित है !
- अन्य सांख्यिकीय विश्लेषण में भी इसका प्रयोग होता है !
- यह माध्य निश्चित और सदा एक ही होता है !

5. इसकी शुद्धता की जाँच सम्भव है !

6. इसके मान में स्थिरता रहती है !

दोष (Demerits) :-

1. कभी-कभी इसके मान के गणन में ऐसी राशि आ सकती है जो प्रकृति के अनुसार सम्भव नहीं हो, जैसे परिवार के सदस्यों की संख्या 3.8 या 5.6 होना !
2. किसी भी एक मूल्य के नहीं होने पर गणना सम्भव नहीं है !
3. चरम मानों का अत्यधिक प्रभाव पड़ता है !
4. इस माध्य का निर्धारण अवलोकन द्वारा सम्भव नहीं है !

उदाहरण :-

1. यदि 3,4,p,7,10 का समान्तर माध्य 6 है तो p का मान है-

$$\text{हल : माध्य} = \frac{\text{राशियों का योग}}{\text{राशियों की संख्या}}$$

$$\therefore \frac{3+4+p+7+10}{5} = 6$$

या

$$\frac{24+p}{5} = 6$$

या $24 + p = 30$ या $p = 30 - 24 = 6$ अतः p का मान 6 होगा !

2. निम्न श्रेणी के समान्तर माध्य की गणना कीजिये :

S. No.	Height (c. m)
1	150
2	160
3	140
4	150
5	168
6	170
7	165
8	162
9	145
10	180
11	167
12	163

वर्गीकृत आँकड़ों का माध्य तीन विधियों से ज्ञात किया जाता है !

(a) प्रत्यक्ष विधि (Direct Method):-

$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f}$ जहाँ $\sum fx$ चरों के उत्पाद तथा बारम्बारताओं के गुणनफल का योग $\sum f$ = बारम्बारताओं का योग !
गुणनफल का योग ! $\sum f$ = बारम्बारताओं का योग !

$$x = \frac{\text{ऊपरी वर्ग सीमा} + \text{निचली वर्ग सीमा}}{2}$$

(b) कल्पित माध्य विधि (Assumed Mean Method):-

$$\bar{x} = a + \frac{\sum fd}{\sum f} \text{ जहाँ } a = (\text{Assumed Mean}):$$

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ के लगभग बीच का मान $d = x - a$

कल्पित माध्य विधि तब प्रयोग में ली जाती है जब x और f के मान बड़े होते हो तो x और f का गुणनफल जटिल हो जाता है तथा इसमें समय अधिक लगता है !

(c) पग / पद विचलन विधि (Step Deviation Method):

पग विचलन विधि तभी सुविधाजनक होगी जबकि सभी d में कोई सर्व गुणनखण्ड है ! इसमें विचलनों को समापवर्तक (वर्गमाप) h द्वारा विभाजित किया जाता है !

$$x = a + h \left(\frac{\sum fu}{\sum f} \right) \text{ जहाँ } u = \frac{x-a}{h}, (a = \text{कल्पित माध्य})$$

1. किसी स्कूल की कक्षा दस के 30 विद्यार्थियों द्वारा गणित के पेपर में से प्राप्त किये गये अंक नीचे सारणी में दिए गये हैं, इन विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों का माध्य ज्ञात कीजिये -

(a) प्रत्यक्ष विधि द्वारा

(b) कल्पित माध्य विधि द्वारा

(c) पद विचलन विधि द्वारा

प्राप्तांक	10-25	25-40	40-55	55-70	70-85	85-100
विद्यार्थियों की संख्या	2	3	7	6	6	6

$$\text{हल :- (a) प्रत्यक्ष विधि : माध्य } (\bar{x}) = \frac{\sum fx}{\sum f}$$

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या (f)	वर्ग चिह्न (x)	(fx)
10-25	2	17.5	35.0
25-40	3	32.5	97.5
40-55	7	47.5	332.5
55-70	6	62.5	375.0
70-85	6	77.5	465.0
85-100	6	92.5	555.0
प्राप्तांक	$\sum f$		$\sum fx = 1860$

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{1860}{30} = 62$$

$$(b) \text{कल्पित माध्य : } \bar{x} = a + \frac{\sum fx}{\sum f}$$

$$M = l_2 - \frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \times h$$

टिप्पणी : सामान्यतया आरोही क्रम में प्रश्न हल करना सुविधाजनक होता है ! उपयुक्त सूत्रों में प्रयुक्त विभिन्न संकेताक्षर इस प्रकार हैं :

M = Median (माधिका)

l_1 = Lower limit of the median group (माधिका वर्ग की निचली सीमा)

l_2 = Upper limit of the median group (माधिका वर्ग की ऊपरी सीमा)

h = magnitude class interval of median group (माधिका वर्ग का वर्ग विस्तार)

f = frequency of median class (माधिका वर्ग की आवृत्ति)

cf = Cumulative frequency of the class preceding to the median class (माधिका वर्ग के ठीक पहले वाले वर्ग की संचयी आवृत्ति)

4. किसी स्कूल की कक्षा दस की 51 लड़कियों की ऊँचाईयों का एक सर्वेक्षण किया गया और निम्नलिखित आकड़े प्राप्त हुए माधिका (Median) ज्ञात कीजिए -

ऊँचाई (cm.) में	लड़कियों की संख्या	वर्ग अन्तराल	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता (cf)
140 से कम	4	140 से कम	4	4
145 से कम	11	140 - 145	7	11
150 से कम	29	145 - 150	18	29
155 से कम	40	150 - 155	11	40
160 से कम	46	155 - 160	6	46
165 से कम	51	160 - 165	5	51
			$n = 51$	

यहाँ $n = 51$ अतः $\frac{n}{2} = \frac{51}{2} = 25.5$ है ! अतः प्रक्षेप अन्तराल : (145-150) आता है तब $l = 145$; $cf = 11$; $f = 18$; $h = 5$

माधिका

$$= l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right) \times h$$

$$\therefore 145 + \left(\frac{25.5 - 11}{18} \right) \times 5$$

$$= 145 + \frac{72.5}{18} = 149.03 \text{ है !}$$

समावेशी श्रेणी में माधिका

जहाँ भी सूत्र में L_1 या L_2 का प्रयोग करते हैं वहाँ समावेशी वर्गान्तरों को अपवर्जी वर्गान्तरों में परिवर्तित किया जाता है ! इस नियम का सदैव पालन करें !

6. निम्न श्रेणी में माधिका ज्ञात कीजिए -

Income	40-	45-	50-	55-	60-	65-
	44	49	54	59	64	69
No. of persons	3	6	10	12	6	10

हल : उपयुक्त प्रश्न समावेशी श्रेणी में हैं जिसे अपवर्जी श्रेणी में परिवर्तित करना होगा ! लेकिन यह आवश्यक नहीं है कि सम्पूर्ण श्रेणी को अपवर्जी (Exclusive) किया जावे ! समय के अभाव में छात्र जिस वर्ग में माधिका आवे केवल

उसी वर्ग का अपवर्जी वर्ग बनाकर भी प्रश्न का हल कर सकते हैं !

Income (x)	No. of persons (f)	Cumulative frequency (c.f.)
39.5-44.5	3	3
44.5-49.5	6	9
49.5-54.5	10	16 (cf)
54.5-59.5	12 (f)	31
59.5-64.5	6	37
64.5-69.5	10	47

Median Group :

अतः माधिका वर्ग (54.5-59.5) होगा

सूत्रानुसार :

$$M = l_1 + \left(\frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \right) \times h$$

$$\therefore 54.5 + \frac{47 - 19}{12} \times 5$$

$$= 54.5 + \frac{23.5 - 19}{12} \times 5$$

$$= 54.5 + \frac{4.5}{12} \times 5 = \text{रु. } 56.37$$

अध्याय - 4

अम्ल, क्षार और लवण, pH स्केल

1. अम्ल:-

- अम्ल एक यौगिक है, जिसमें हाइड्रोजन आयन पाए जाते हैं, विलयन में $H^+(aq)$, उसकी अम्लीय विशेषता के लिए उत्तरदायी होते हैं।
- ब्रोस्टेड-लोवरी सिद्धांत के अनुसार, अम्ल एक ऐसा प्रकार है जो अन्य प्रकारों को प्रोटोन दे सकता है।
- हाइड्रोजन आयन अकेले नहीं पाए जाते हैं, बल्कि वे पानी के अणुओं के साथ संयोजन के बाद मौजूद होते हैं। अतः, पानी में घोलने पर केवल धनात्मक आयनों के रूप में हाइड्रोनियम आयन (H_3O^+) प्राप्त होते हैं।
- हाइड्रोजन आयनों की मौजूदगी एसिड को प्रबल और अच्छा विद्युत अपघट्य बनाती है।

प्रबल अम्ल:-

प्रबल अम्ल के उदाहरण हैं: हाइड्रोक्लोरिक अम्ल, सल्फ्यूरिक अम्ल, नाइट्रिक अम्ल इत्यादि।

कमजोर अम्ल:-

उदाहरण हैं:- एसिटिक अम्ल, फॉर्मिक अम्ल, कार्बोनिक अम्ल इत्यादि।

अम्ल सामान्यतः स्वाद में खट्टे और संक्षारक होते हैं।

- सूचक** : परीक्षण कीजिये कोई पदार्थ अम्लीय है या क्षारीय।
- उदाहरण: हल्दी, लिटमस, गुड़हल, इत्यादि प्राकृतिक रूप से पाए जाने वाले सूचकों में से कुछ हैं।
- लिटमस को थैलेफाइटा समूह से संबंधित एक पौधे लाइकेन से निकाला जाता है। आसुत जल में इसका रंग बैंगनी होता है। जब इसे अम्लीय विलयन में रखा जाता है तो इसका रंग लाल हो जाता है और जब इसे क्षारीय विलयन में रखा जाता है, तो इसका रंग नीला हो जाता है।
- वे विलयन, जिनमें लिटमस का रंग या तो लाल या नीले में परिवर्तित नहीं होता है, उदासीन विलयन कहलाते हैं। ये पदार्थ न तो अम्लीय होते हैं न ही क्षारीय।
- गंध सूचक, कुछ पदार्थ ऐसे होते हैं, जिनकी गंध अम्लीय या क्षारीय मीडियम में परिवर्तित हो जाती है।

अम्ल के प्रयोग :-

- हमारे आमाशय में उपस्थित हाइड्रोक्लोरिक अम्ल भोजन के पाचन में मदद करता है।
- विटामिन C या एस्कॉर्बिक अम्ल शरीर के लिए आवश्यक पोषक तत्व प्रदान करता है।
- कार्बोनिक अम्ल का उपयोग कानिटेड पेय पदार्थ और उर्वरक बनाने में किया जाता है।
- एक परिरक्षक सिरका, एसिटिक एसिड का तनुरूप है।
- सल्फ्यूरिक अम्ल का उपयोग उर्वरकों, पेंट, सिंथेटिक फाइबर इत्यादि के निर्माण में किया जाता है।

- नाइट्रिक अम्ल का उपयोग एक्वा रेंजिया को तैयार करने में किया जाता है, जिसका उपयोग सोने और चांदी जैसी कीमती धातुओं के शुद्धीकरण में किया जाता है।
- बोरिक अम्ल का उपयोग आंखों को धोने के लिए किया जाता है।
- फॉस्फोरिक अम्ल का उपयोग उर्वरक और डिटरजेंट बनाने में किया जाता है।
- किसी अम्ल की क्षारकता को अम्ल के एक अणु में मौजूद आयनीकृत होने वाले हाइड्रोजन (H^+) आयनों की संख्या के रूप में परिभाषित किया जाता है।

अम्ल	फॉर्मूला	क्षारकता
हाइड्रोक्लोरिक	HCL	1-मोनोबेसिक

अम्ल	फॉर्मूला	क्षारकता
नाइट्रिक अम्ल	HNO_3	1-मोनोबेसिक
कार्बोनिक अम्ल	H_2CO_3	2-डाइबेसिक
सल्फ्यूरिक अम्ल	H_2SO_4	2-डाइबेसिक
फोस्फोरस अम्ल	H_3PO_3	2-डाइबेसिक
फोस्फोरिक अम्ल	H_3PO_4	2-डाइबेसिक

अम्ल युक्त कार्बोक्जिलिक अम्ल के लिए, हम हाइड्रोजन परमाणुओं की संख्या की गणना नहीं करते हैं, बल्कि कार्बोक्जिल समूह (अर्थात् $COOH$) की संख्या देखते हैं।

रोज़मर्री की जिंदगी में उपयोग होने वाले अम्ल :- अम्ल दो अलग-अलग स्रोतों से प्राप्त होते हैं। वे कार्बोनिक या खनिज अम्ल हो सकते हैं। सभी अम्लों में कुछ समान विशेषताएँ होती हैं।

अम्ल के स्रोत	अम्ल का नाम
विनेगर	एसिटिक अम्ल
खट्टे फल	सिट्रिक अम्ल
अंगूर, इमली, करोंदे	टार्टरिक अम्ल
खट्टा दूध	लैक्टिक अम्ल
सेब	मैलिक अम्ल
दही	ब्यूट्रिक अम्ल
चाय, टमाटर	ऑक्जलिक अम्ल
लाल चींटियों का डंक और मधुमक्खियाँ	फॉर्मिक अम्ल
प्रोटीन	अमीनो अम्ल
अमरुद, संतरे	एस्कोर्बिक अम्ल

नोट:- पानी में अम्ल या क्षार को घोलने की प्रक्रिया अति ऊष्मक्षेपी प्रक्रियाओं में से एक है। अम्ल को पानी

में हमेशा धीरे-धीरे उसे लगातार हिलाते हुए डालना चाहिए।

2. क्षार और एलकली :-

- क्षार एक ऐसा पदार्थ है, जिसे पानी में घोलने पर OH- आयन प्राप्त होते हैं। क्षार सामान्यतः धातु हाइड्रॉक्साइड (MOH) होते हैं।
- ब्रोन्स्टेड-लोवरी सिद्धांत के अनुसार, क्षार एक प्रोटोन स्वीकर्ता हैं।
- क्षार कड़वे स्वाद के साथ साबुन पदार्थ हैं।
- किसी क्षार की प्रबलता उसे पानी में घोलने पर प्राप्त हाइड्रॉक्सेल आयनों की सांद्रता पर निर्भर करती है।
- जल में घुलनशील क्षार एलकली कहलाते हैं। सभी एलकली क्षार होते हैं लेकिन सभी क्षार एलकली नहीं होते हैं।

मजबूत क्षार :-

उदाहरण:-

- सोडियम हाइड्रॉक्साइड: NaOH (कास्टिक सोडा),
- पोटेशियम हाइड्रॉक्साइड: KOH (caustic potash),
- कैल्शियम हाइड्रॉक्साइड: Ca(OH)₂

कमजोर क्षार:-

उदाहरण:-

- मैग्नीशियम हाइड्रॉक्साइड: Mg(OH)₂, अमोनियम हाइड्रॉक्साइड: NH₄OH.

3. लवण

पोटाश फिटकरी:- (पोटेशियम एल्युमिनियम सल्फेट KAl(SO₄)₂)

- इसका उपयोग कपड़े को डाई करने वाले उद्योगों में डाई करने के लिए किया जाता है।
- इसका उपयोग दांतों को साफ करने में किया जाता है।

उद्योगों में लवण का उपयोग:-

- सोडियम क्लोराइड का उपयोग क्लोरीन, कास्टिक सोडा, वॉशिंग सोडा और बेकिंग सोडा बनाने में किया जाता है।
- अमोनियम लवणों का उपयोग उर्वरकों के रूप में किया जाता है।
- पोटेशियम नाइट्रेट का उपयोग बंदूक पाउडर बनाने और अग्नि कार्यों में किया जाता है।
- सिल्वर नाइट्रेट का उपयोग फोटोग्राफी में किया जाता है।
- पोटेशियम क्लोरेट का उपयोग मैच उद्योग में किया जाता है।
- एल्युमिनियम सल्फेट का उपयोग फिटकरी बनाने में किया जाता है।

4. पीएच पैमाना:-

लॉरेंट्स सॉरेनसेन ने पीएच मान में p से आशय है जर्मन में पोटेन्ज (potenz), अर्थात् शक्ति

- वह पैमाना, जो अम्ल या क्षार की प्रबलता को मापता है, पीएच पैमाना कहलाता है। यह मान 0 और 14 के बीच में होता है।
- हाइड्रोनियम आयन की अधिक सांद्रता, कम पीएच मान को दर्शाती है।
- किसी उदासीन विलयन का पीएच 7 होता है। पीएच पैमाने पर 7 से कम मान एक अम्लीय विलयन को दर्शाता है। चूंकि पीएच मान 7 से 14 तक बढ़ता है, यह विलयन में OH-आयन सांद्रता में वृद्धि दर्शाता है, अर्थात्, एलकली की प्रबलता में वृद्धि।
- अधिकांश खाद्य फसलें 7-7.8 के पीएच पर सबसे अधिक पनपती हैं। यदि मिट्टी बहुत अम्लीय होती है तो पीएच को चूना (या बुझा हुआ चूना) मिलाकर बढ़ाया जा सकता है, जो मिट्टी में अधिक अम्ल को निष्क्रिय कर देता है। इसी प्रकार, यदि मिट्टी बहुत क्षारीय होती है तो इसके पीएच को जिप्सम या कुछ अन्य पदार्थ मिलाकर कम किया जा सकता है, जो मिट्टी में मौजूद अतिरिक्त क्षार को निष्क्रिय कर सकते हैं।
- हमारे पेट का मीडियम अत्यधिक अम्लीय है और उसका पीएच लगभग 1.2 है। हमारे पेट में हाइड्रोक्लोरिक अम्ल स्रावित होता है, जो भोजन के पाचन में मदद करता है। मैग्नीशियम हाइड्रॉक्साइड (मैग्नीशिया ऑफ़ मिल्क), एक मंद क्षार, एक एंटीसिड है जो अतिरिक्त अम्ल को निष्क्रिय करता है।
- जब मुंह का पीएच 5.5 से कम होता है, तो दन्त क्षय शुरू हो जाता है।
- अम्ल वर्षा - जब वर्षा जल का पीएच मान 5.6 से कम होता है, तो इसे अम्ल वर्षा कहते हैं।
- जठर रस - 1.2
- नीबू का रस- 2.2
- शुद्ध जल-7.4
- मिल्क ऑफ़ मैग्नीशिया - 10
- सोडियम हाइड्रॉक्साइड विलयन- 14
- नोट - शुक्र का वायुमंडल सल्फ्यूरिक अम्ल के मोटाई वाले सफेद और पीले बादलों से बना है।

❖ pH स्केल

pH (potential of Hydrogen)

- पीएच या pH, किसी विलयन की अम्लता या क्षारकता का एक माप है। इसे द्रवीभूत हाइड्रोजन आयनों (H⁺) की गतिविधि के सह-लघुगणक (कॉलॉगरिदम) के रूप में परिभाषित किया जाता है। हाइड्रोजन आयन के गतिविधि गुणांक को प्रयोगात्मक रूप से नहीं मापा जा सकता है, इसलिए वे सैद्धांतिक गणना पर आधारित होते हैं। pH स्केल, कोई सुनिश्चित स्केल नहीं है; इसका संबंध मानक विलयन के एक सेट (समुच्चय) के साथ होता है जिसके pH का आकलन अंतर्राष्ट्रीय संविदा के द्वारा किया जाता है।

अपवर्तनांक अधिक	काफी	अपवर्तनांक कम
आभूषण उपयोग	बनाने में	पेंसिल, इलेक्ट्रोड में उपयोग

फुलेरीन (Fullerene)- यह कार्बन का ठोस क्रिस्टलीय रूप है। इसका अणु गोलाकार होता है, जिसमें मूलतः 60 कार्बन परमाणु होते हैं। वर्तमान में इससे अधिक कार्बन परमाणु वाले फुलेरीन की खोज हो चुकी है। जैसे- C_{70} , C_{84} , C_{90} , C_{120} आदि

- C_{60} की संरचना सबसे अधिक स्थायी होती है, जिसे बकमिन्सटर फुलर के नाम पर 'बकमिन्सटर फुलेरीन' नाम दिया गया है।
- C_{60} अणु के 32 फलक होते हैं, जिनमें से 20 षटकोणीय तथा 12 पंचकोणीय हैं, जो एक-दूसरे से संयुक्त रहते हैं।
- C_{60} कार्बन का एक अत्यधिक क्रियाशील रूप होता है। C_{60} की अधिक अभिक्रियाशीलता मुख्यतः $C=C$ समूह की असमतलियता के कारण होता है।

कोक (Coke)-

- यह काले भूरे रंग का ठोस होता है।
- वायु की अनुपस्थिति में कोयले के भंजक आसवन से कोक प्राप्त होता है।
- कोक का उपयोग इंजन, बॉयलर व भट्टियों में ईंधन की भांति होता है।
- कोक का उपयोग धातुओं के निष्कर्षण में अपचायक की भांति किया जाता है।

चारकोल (Charcoal)-

- यह मुलायम, काला व अत्यंत छिद्रयुक्त नरम पदार्थ होता है। इसकी मुख्य तीन किस्में पाई जाती हैं-

काष्ठ चारकोल (Wood Charcoal)-

- जब लकड़ी को हवा की अपर्याप्त मात्रा में जलाया जाता है तो काष्ठ चारकोल प्राप्त होता है।
- काष्ठ चारकोल के अत्यंत छिद्रयुक्त होने के कारण इसका उपयोग 'गैस मार्स्क' के रूप में गैसों को अवशोषित करने में किया जाता है।

जंतु चारकोल (Animal Charcoal) -

- जंतु चारकोल में लगभग 10 प्रतिशत कार्बन होता है, इसे अस्थि कालिख भी कहा जाता है, क्योंकि यह हड्डियों के भंजक आसवन से प्राप्त होता है।
- इसका मुख्य उपयोग चीनी के विलयन को साफ करने में किया जाता है।

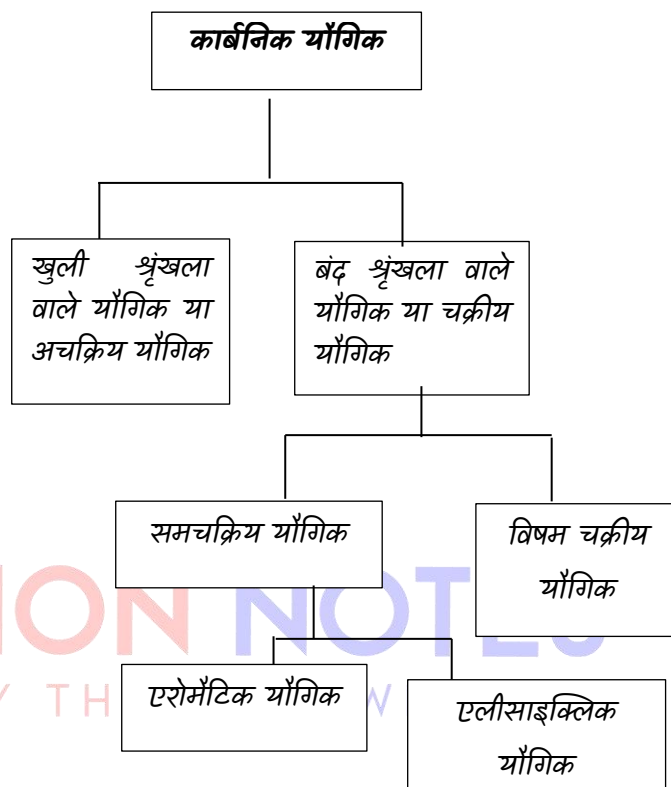
चीनी चारकोल (Sugar Charcoal)-

- यह कार्बन के असंरचनात्मक अपरूपों में से 'शुद्धतम अपरूप' होता है।
- चीनी पर सल्फ्यूरिक अम्ल (H_2SO_4) की क्रिया द्वारा इसे प्राप्त किया जाता है।
- इसका उपयोग रंजक के रूप में होता है।

काजल (Lamp Black)-

- यह महीन, काले रंग का चूर्ण होता है।
- इसे केरोसिन तेल, तारपीन तेल, पेट्रोलियम आदि कार्बनयुक्त पदार्थों को जलाकर प्राप्त किया जाता है।
- काजल में लगभग 95 प्रतिशत कार्बन पाया जाता है तथा इसका उपयोग जूते की पॉलिश, प्रिंटिंग की रखाही, आँखों का काजल आदि बनाने के लिये किया जाता है।

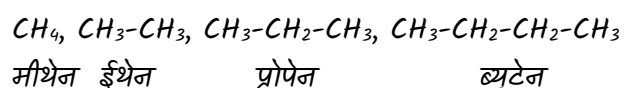
कार्बनिक यौगिकों का वर्गीकरण -



खुली शृंखला वाले यौगिक - वे कार्बनिक यौगिक, जिनमें कार्बन के सभी परमाणु आपस में एक खुली शृंखला में जुड़े रहते हैं, खुली शृंखला वाले यौगिक या अचक्रिय यौगिक या एलीफैटिक यौगिक कहलाते हैं।

ग्रीक भाषा में एलिफॉस = वसा (Fat) अर्थात् प्रारंभ में एलिफैटिक शब्द का उपयोग केवल उच्च वसा अम्लों के लिये किया गया था, परन्तु अब शब्द का उपयोग सभी खुली शृंखला वाले यौगिकों के लिये किया जाता है।

उदाहरण:



बंद शृंखला वाले यौगिक - वे कार्बनिक यौगिक, जिनमें कार्बन परमाणु आपस में जुड़कर एक बंद शृंखला या चक्र बनाते हैं, बंद शृंखला वाले यौगिक या चक्रीय यौगिक कहलाते हैं।

समचक्रिय यौगिक (Homocyclic Compounds)-

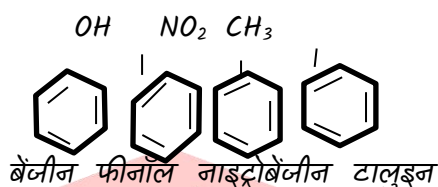
वे चक्रीय यौगिक जिनकी वलय में केवल कार्बन परमाणु होते हैं, समचक्रिय यौगिक कहलाते हैं।

समचक्रिय यौगिक भी दो प्रकार के होते हैं-

(a) एरोमैटिक यौगिक (Aromatic Compounds)-

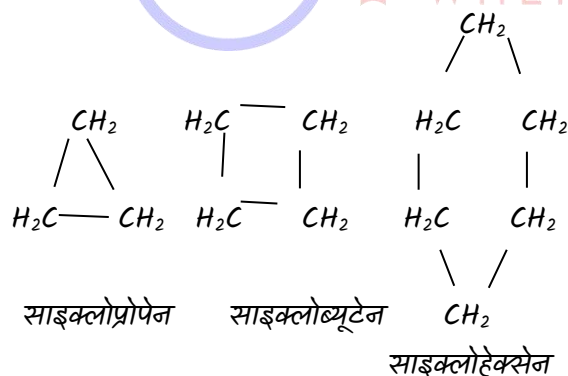
- वे समचक्रिय यौगिक, जिनमें कार्बन की बंद श्रृंखला 6 कार्बन परमाणुओं द्वारा बनी होती है।
- कार्बन की बंद श्रृंखला में एकल बंध व युग्म बंध एकांतर क्रम में पाए जाते हैं। इस प्रकार के वलय को बेंजीन रिंग कहा जाता है।
- एरोमैटिक यौगिकों में कम-से-कम एक बेंजीन रिंग अवश्य पाई जाती है।
- एरोमैटिक यौगिकों में कार्बन की प्रतिशत मात्रा एलिफैटिक यौगिकों से अधिक होती है। अतः इनको जलाने पर काले धुएँ की ज्वाला से जलते हैं।

उदाहरण:



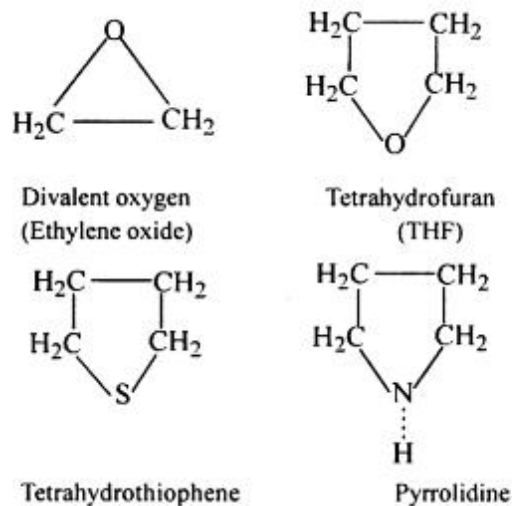
(b) एलीसाइक्लिक यौगिक (Alicyclic Compounds)-

वे समचक्रिय यौगिक, जो एलिफैटिक यौगिकों के समान होते हैं, किन्तु एक बंद वलय बना लेते हैं, एलीसाइक्लिक यौगिक कहलाते हैं।



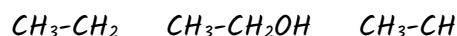
विषमचक्रिय यौगिक (Heterocyclic Compounds) -

वे चक्रीय यौगिक जिनके वलय में कार्बन परमाणुओं के अतिरिक्त अन्य तत्व (जैसे- N, O, S) भी पाए जाते हैं, विषमचक्रिय यौगिक कहलाते हैं।



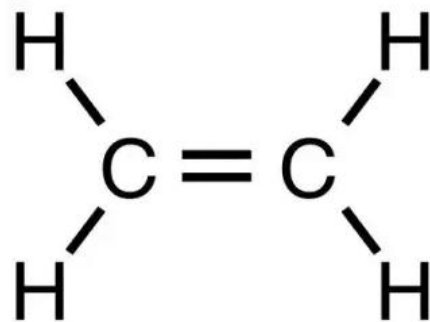
संतृप्त एवं असंतृप्त यौगिक-

संतृप्त यौगिक (Saturated Compounds)- वे कार्बनिक यौगिक जिनमें कार्बन-कार्बन परमाणुओं के बीच केवल एकल बंध पाया जाता है, संतृप्त यौगिक कहलाते हैं।



असंतृप्त यौगिक -

वे कार्बनिक यौगिक जिनमें कम-से-कम दो कार्बन परमाणुओं के बीच युग्म बंध या त्रिक बंध पाया जाता है, असंतृप्त यौगिक कहलाते हैं।



क्रियात्मक समूह (Functional Group)-

किसी कार्बनिक यौगिक में उपस्थित वह परमाणु या समूह, जो उस कार्बनिक यौगिक से रासायनिक गुणों के लिये उत्तरदायी होता है, क्रियात्मक समूह कहलाता है।

उदाहरण: मिथाइल क्लोराइड यौगिक दो समूहों मिथाइल तथा क्लोरीन से मिलकर बना है, किन्तु इसके रासायनिक गुणों का निर्धारण मुख्यतः क्लोरीन परमाणु के कारण होता है। अतः मिथाइल क्लोराइड अणु में क्लोरीन क्रियात्मक समूह है।

समजातीय श्रेणी- विभिन्न कार्बनिक यौगिकों की ऐसी श्रेणियाँ जिनमें दो परस्पर क्रमागत सदस्यों के अनुसूत्र में CH_2 का अंतर होता है, समजातीय श्रेणियाँ कहलाती हैं।

- यह रक्त में ग्लूकोस की मात्रा को नियंत्रित करते हैं।
- इसके स्त्राव के कमी से मधुमेह (diabetes) नामक रोग हो जाता है।

6. जनन ग्रंथि (gonads) :- जनन कोशिकाओं का निर्माण इसका मुख्य कार्य है।

(i) अंडाशय :- अंडाशय के द्वारा कई हॉर्मोन का स्त्राव होता है। बालिकाओं के शरीर में यौवनावस्था में होनेवाले परिवर्तन इन हॉर्मोन के कारण ही होता है।

(ii) वृषण :- वृषण द्वारा स्त्रावित हॉर्मोन को एन्ड्रोजेन्स (androgens) कहते हैं।

- यह हॉर्मोन पुरुष के शरीर में लैंगिक लक्षणों के परिवर्द्धन एवं यौन-आचरण को प्रेरित करता है।

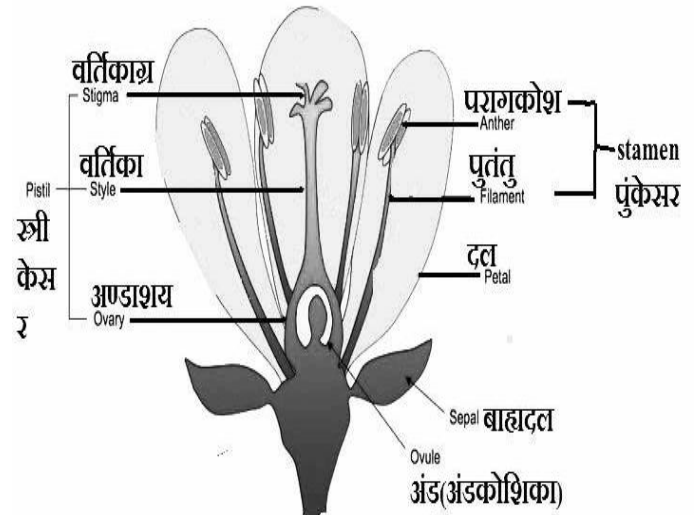
अध्याय - 10

जीवों में जनन, जनन में हार्मोंस की भूमिका

वनस्पतियों में जनन (Reproduction in plants)

वनस्पतियों में जनन की प्रमुख विधियाँ -

1. कायिक जनन (Vegetative Reproduction),
2. अलैंगिक जनन (Asexual Reproduction) और
3. लैंगिक जनन (Sexual Reproduction)



चित्र- पुष्प की अनुदैर्घ्य काट

वानस्पतिक जनन (Vegetative reproduction) या vegetative propagation या vegetative multiplication या vegetative cloning) एक प्रकार का अलैंगिक जनन है जो वनस्पतियों में होता है। इस जनन प्रक्रिया में बिना बीज या बीजाणु (spores) के ही नयी वनस्पति पैदा होती है। वानस्पतिक जनन प्राकृतिक रूप से भी होता है और उद्यानवैज्ञानिकों (horticulturists) द्वारा प्रेरित भी हो सकता है।

वानस्पतिक जनन में कोई वानस्पतिक भाग, (जड़, तना, अथवा पत्ती) नए पेड़ की उत्पत्ति करता है और जनक पौधे से अलग होकर नया जीवन प्रारंभ करता है। इसके दो प्रकार, एक प्राकृतिक और दूसरा कृत्रिम, हैं।

प्राकृतिक वानस्पतिक जनन निम्नलिखित प्रकार का होता है :

- समुद्भवन (Budding) कोशिका में एक तरफ या चारों तरफ अनेक प्रवर्ध निकलकर मातृ कोशिका से अलग होकर स्वतंत्र रूप से प्रवर्धन (process) कर कोशिकाओं की शृंखला बनाते हैं। इसका उदाहरण यीस्ट है। एक दूसरे प्रकार के समुद्भवन को जीमा (Gemma) समुद्भवन कहते हैं, जिसमें पतृक पिंड के किसी निकले भाग से कलियाँ निकलकर उसी के साथ लिपटी रहती हैं, या अलग हो जाती हैं। ऐसा जनन काई, लिवरवर्ट और प्रवाल डेंड्रोफिलिया (Dendrophyllia) में देखा जाता है।

- भूस्तारी या रनर (Runner) में जो पौधे सीधे खड़े नहीं हो सकते वे जमीन पर रेंगते हुए बढ़ते हैं, उनके ऊपर के भाग पर वल्कल पत्र (scab leaves) रहते हैं, जिनके कोणों में कलियाँ रहती हैं। कलियों के बीच पतली झकड़ा जड़ें निकलकर जमीन के अंदर चली जाती हैं और इस प्रकार नए पौधे तैयार होते हैं। दूब घास इसका उदाहरण है।
- सकर (Suckers) भूस्तारी से मिलता जुलता है। अंतर यह है कि सकर में जमीन के अंदर तनों पर वल्कल पत्र होते हैं और उनके कोणों की कलियों से शाखाएँ निकलकर हवा में चली जाती हैं। प्रत्येक शाखा के तल से झकड़ा जड़ें निकलकर जमीन के अंदर घुस जाती हैं। पुदीना इसका उदाहरण है।
- भूस्तरिका या आफसेट (Offset) भी भूस्तारी की तरह फैलती है, पर यह भूस्तारी से छोटी और मोटी होती है तथा थोड़ी दूर ही रेंगकर तने के अंत में एक नया पौधा उत्पन्न करती है।
- पत्रकंद या बल्बिल में अक्षकोणीय कलियाँ होती हैं, जो अधिक मात्रा में खाद्य पदार्थ एकत्रित हो जाने से मोटी हो जाती हैं और जमीन पर गिरने पर नए पौधे को जन्म देती हैं। लहसुन, पुष्पक्रम (Inflorescence), बनआलू या जमीकंद (Dioscorea bulbifera), अनन्नास इत्यादि इसके उदाहरण हैं।
- प्रकंद या राइजोम (Rhizome) के ऊपर वल्कल पत्र और नीचे झकड़ा जड़ें होती हैं। पत्र के कोणों की कलियों से अंकुर निकलकर हवा में चले जाते हैं। जड़ें प्रमुख राइजोम से अलग होकर वंशविस्तार करती हैं। इसके उदाहरण अदरक, हल्दी और फर्न हैं।
- घनकंद या कार्म (Corm) के उदाहरण घुइयाँ और बंडा हैं। इनमें नीचे एक फूला हुआ तना रहता है जिसे मंडल (Disc) कहते हैं। इसके ऊपर वल्कलपत्र का आवरण होता है। इनको कोण में कलियाँ रहती हैं, जिनसे अनुकूल मौसम पर अंकुर निकलकर ऊपर चला जाता है और नीचे से जड़ें निकलकर पृथ्वी के अंदर चली जाती हैं। इस प्रकार नए पौधे उत्पन्न होते रहते हैं।
- बल्ब (Bulb) घनकंद सा ही होता है, पर इसका मंडल अपेक्षया छोटा होता है और ऊपर रसीली मोटी फाँकियाँ होती हैं। अंदर की पत्ती के कोण में कली रहती है, जो अनुकूल मौसम पर नए तने को जन्म देती है। प्याज इसका उदाहरण है।
- कंद या ट्यूबर (Tuber) वल्कलपत्रों के कोणों में कंद लगता है। कंद का तना फूला हुआ रहता है। इसमें खाद्य संचित रहता है। आलू इसका अच्छा उदाहरण है। आलू पर कलियाँ या आँखें होती हैं। प्रत्येक आँख एक पौधा उत्पन्न करती है।
- जड़ों द्वारा वानस्पतिक उत्पादन में सतावर (Asparagus), डैलिया (Dahlia) और शकरकंद की जड़ें कंद उत्पन्न करती हैं, इन कंदों से फिर नए पौधे उत्पन्न होते हैं।

- पत्तियों द्वारा उत्पादन में कुछ पौधों के पत्ते नए पौधे उत्पन्न करते हैं। इन्हें पत्रकलिका (Leaf buds) कहते हैं। पत्थर कुची (Bryophyllum), बेगोनिया (Begonia), पर्णवृंत (Petiole) तथा कैलैंकोइ (Kalanchoe) इसके उदाहरण हैं। कुछ फर्न में भी इसी रीति से जनन होता है।

कृत्रिम वानस्पतिक जनन

- कुछ पौधों का जनन कृत्रिम रीति से भी होता है। कुछ पौधे तनों की कतरन (cutting) से (इसके उदाहरण इरंडा, गुलाब, मेहदी इत्यादि हैं), कुछ पौधे कलम बाँधने (Grafting) से (इसके उदाहरण आम, नीबू, कटहल आदि हैं) और कुछ दाब कलम (Layering) से (इसका उदाहरण अंगूर की लता है) नए पौधों को उत्पन्न करते हैं।

पादपों में अलैंगिक प्रजनन

- अधिकांश जंतुओं में प्रजनन की क्रिया के लिए संसेचन (शुक्राणु का अंड से मिलना) अनिवार्य है; परंतु कुछ ऐसे भी जंतु हैं जिनमें बिना संसेचन के प्रजनन हो जाता है, इसको अनिषेक जनन या अलैंगिक जनन (Asexual reproduction) कहते हैं।
- अलैंगिक जनन में विशेष प्रकार की कोशिकाएँ, बिना किसी दूसरी इकाई से मिले ही, नए पौधों को उत्पन्न करती हैं। यह विखंडन विधि (fission) या बीजाणुनिर्माण विधि (sporulation) से होता है। पहली विधि से ही शैवाल, कवक और बीजाणुओं आदि का जनन एवं वर्धन होता है।
- दूसरी विधि से जनन बीजाणुओं द्वारा होता है। बीजाणु एककोशीय और बहुत सूक्ष्म होते हैं। कुछ शैवालों, जलकाइयों और कवकों में बीजाणु होते हैं जो केवल प्रोटोप्लाज्म के बने होते हैं। इनमें लोमक (Cilia) होते हैं। ऐसे बीजाणुओं को चलजन्यु (zoospores) कहते हैं। ये चलजन्यु लोमक की सहायता से तैरते हैं और शुद्धजलीय प्राणियों की भाँति बाद में नए पौधों में बदल जाते हैं। कुछ पदार्थों में, जैसे यूलोथ्रिक्स (Ulothrix) चलजन्यु अधिक संख्या में और सैप्रोलैंगिया (Saprolegnia) में उत्पन्न होते हैं।
- कुछ शैवालों, जैसे नॉस्टॉक (Nostoc) में, बीजाणुतंतु की कोशिकाओं से अचल बीजाणु उत्पन्न होते हैं, जो हवा से उड़कर फैलते हैं। बीजाणुजनक (sporophytes) से बीजाणुओं का निर्माण होता है, जिनमें नर और मादा दोनों होती हैं। ये परस्पर मिलकर युग्मक-सू (गैमेटोफाइट, Gametophyte) बनते हैं, जिनसे फिर बीजाणु और उनसे बीजाणुजनक बनते हैं।
- कुछ मछलियों को छोड़कर किसी भी पृष्ठवंशी में अनिषेक जनन नहीं पाया जाता और न कुछ बड़े कीटगण, जैसे व्याधपतंगगण (ओडोनेटा) तथा भिन्नपक्षानुगण (हेटरोप्टेरा) में। कुछ ऐसे भी जंतु हैं जिनमें प्रजनन सर्वथा (अथवा लगभग सर्वथा) अनिषेक जनन द्वारा ही होता है, जैसे द्विजननिक विट्टपत्रा (डाइजेनेटिक ट्रेमैटोड्स), किरोटवर्ग (रोटिफर्स), जलपिंशु (वाटर फ्ली) तथा दूयूका

विधि के सूत्र -

- नियम से उदाहरण की ओर
- अज्ञात से ज्ञात की ओर
- सामान्य से विशिष्ट की ओर
- सूक्ष्म से स्थूल की ओर
- प्रमाण से प्रत्यक्ष की ओर

विधि की विशेषताएं -

- उच्च कक्षाओं में गणित को सीखने के लिए निगमन विधि का ही प्रयोग किया जाता है।
- यह विधि संक्षिप्त होने के साथ-साथ व्यावहारिक भी है। इस विधि से कम समय में अधिक ज्ञान प्राप्त करना संभव है।
- इस विधि में छात्रों एवं अध्यापकों को कम परिश्रम करना पड़ता है।
- नवीन समस्याओं को हल करने के लिए यह विधि अत्यंत उत्तम है।

विधि के दोष -

- इस विधि से छात्रों में तर्क एवं गहन चिंतन का विकास संभव नहीं है।
- इस विधि से गणित का मौलिक विकास भी संभव नहीं है।
- इस विधि से अर्जित ज्ञान स्थायी नहीं होता।
- यह विधि छोटी कक्षाओं के लिए उपयोगी नहीं है।
- इस विधि में रटने को अधिक बल मिलता है तथा विद्यार्थियों को तर्क एवं अन्वेषण करने के अवसर प्राप्त नहीं होते हैं।
- यह विधि मनोवैज्ञानिक नहीं है, क्योंकि 'सूक्ष्म से स्थूल की ओर' का सिद्धांत मनोविज्ञान के सिद्धांतों के विपरीत है।
- निगमन विधि प्रतिभाशाली छात्रों के लिए उपयोगी नहीं है।

अध्यापकों के सुझाव -

- गणित के अध्ययन में आगमन पर बल देना चाहिए।
- आगमन विधि से सिद्धांत, नियम, सूत्र संबंध आदि ज्ञात किए जाते हैं। सिद्धांत निरूपण के पश्चात निगमन विधि का उपयोग करें।

आगमन एवं निगमनक विधि : तुलनात्मक अध्ययन	
आगमन विधि	निगमन विधि
1. शिक्षण विशिष्ट से सामान्य की ओर होता है।	शिक्षण सामान्य से विशिष्ट की ओर होता है।
2. शिक्षण उदाहरण से सिद्धांत की ओर होता है।	शिक्षण सिद्धांत से उदाहरण की ओर होता है।
3. शिक्षण ज्ञात से अज्ञात की ओर होता है।	शिक्षण अज्ञात से ज्ञात की ओर होता है।

4. विधि में बालक नियम स्वयं खोजता है।	विधि में अध्यापक नियमों व सिद्धांतों को प्रस्तुत करता है।
5. यह मनोवैज्ञानिक विधि है।	यह अमनोवैज्ञानिक विधि है।
6. यह विधि नवीन ज्ञान की ओर प्रोत्साहित करती है।	इस विधि में नवीन ज्ञान को प्राप्त करने के अवसर नहीं मिलते हैं।
7. अर्जित ज्ञान स्थायी होता है।	अर्जित ज्ञान स्थायी नहीं होता है।

अनुसंधान विधि

अनुसंधान विधि के जन्मदाता प्रो. हेनरी एडवर्ड आर्मस्ट्रांग हैं। ह्युरिस्टिक (Heuristic) शब्द की उत्पत्ति ग्रीक भाषा के ह्युरिस्को (Heurisko) शब्द से हुई, जिसका अर्थ है, मैं खोजता हूँ। विधि में विद्यार्थी अन्वेषक के रूप में कार्य करता है, तथा समस्याओं का समाधान करता है।

विधि के गुण -

- विधि से वैज्ञानिक दृष्टिकोण का विकास होता है।
- खोज की प्रवृत्ति तथा जिज्ञासा विकसित होती है।
- अध्यापक केवल निर्देश देता है।
- बालक का मानसिक विकास होता है।
- बालक क्रियाशील रहता है।

विधि के दोष -

- अधिक समय में कम ज्ञान प्राप्त होता है।
- छोटी कक्षाओं के लिए उपयोगी विधि नहीं है।
- विधि में शिक्षण कार्य मंद गति से चलता है।
- समस्या के चयन में प्रशिक्षण एवं कौशलों की आवश्यकता होती है।
- यह खर्चीली विधि है।

विधि के सिद्धांत -

- विधि करके सीखने के नियम पर आधारित है।
- क्रियाशीलता के नियम का अनुसरण विधि में उपयोग होता है।
- मनोवैज्ञानिक दृष्टिकोण पर आधारित है।
- विधि में वैज्ञानिक दृष्टिकोण होता है।

प्रयोगशाला विधि

इस विधि में स्वयं विद्यार्थी को प्रत्यक्ष अनुभवों द्वारा तथ्यों से परिचित होने का अवसर मिलता है। विधि में छात्र प्रयोगशाला में जाकर स्वयं प्रयोग करते हैं और प्रत्यक्ष अनुभवों द्वारा ज्ञान प्राप्त करते हैं। अध्यापक समय-समय पर छात्रों को निर्देश देकर मार्गदर्शन करता है।

विधि के सिद्धांत -

- क्रिया आधारित सिद्धांत पर।
- अवलोकन के नियम पर आधारित।

- आगमन विधि का विस्तृत एवं व्यावहारिक रूप है।

विधि के सूत्र -

- ज्ञात से अज्ञात की ओर
- क्रिया आधारित विधि।
- स्थूल से सूक्ष्म की ओर।

विधि के गुण -

- विधि से अर्जित ज्ञान स्थायी होता है।
- विज्ञान विषय को अधिक व्यावहारिक विषय के रूप में प्रस्तुत किया जाता है।
- बालकों में तार्किक, चिंतन एवं निरीक्षण शक्तियों का विकास होता है।
- यह मनोवैज्ञानिक तथा वैज्ञानिक विधि है।
- बालकों में रचनात्मक कार्य, समस्या समाधान की योग्यता का विकास होता है।

विधि के दोष -

- खर्चीली विधि होने के कारण, विद्यालयों में सीमित प्रयोग होता है।
- केवल छोटी कक्षाओं में ही प्रयोग किया जा सकता है।
- विधि में अधिक समय लगता है। इसलिए पाठ्यक्रम पूर्ण करना कठिन होता है।
- कुछ ही प्रकरणों का शिक्षण - अधिगम विधि द्वारा कराया जा सकता है।
- सभी सिद्धांतों, नियमों सूत्रों को प्रयोगशाला में सत्यापन कराना कठिन है।
- प्रयोगशाला विधि में अधिक संसाधनों की आवश्यकता होती है इसलिए इसे खर्चीली विधि है।

प्रायोजना विधि

प्रायोजना विधि जॉन डीवी की विचारधारा पर आधारित है। डीवी के शिष्य विलियम किलपैट्रिक ने इस विधि को व्यावहारिक रूप दिया। विधि का प्रयोग सर्वप्रथम 1918 में शिक्षा के क्षेत्र में किया गया। किलपैट्रिक के अनुसार योजना एक सोद्देश्य क्रिया है जिसे पूरे मन से सामाजिक वातावरण में सम्पन्न किया जाता है।

परिभाषा -

"प्रोजेक्ट सामाजिक वातावरण में पूर्ण संलग्नता से किया जाने वाला उद्देश्यपूर्ण कार्य है।" - किलपैट्रिक

"प्रोजेक्ट एक समस्यात्मक कार्य है जिसका समाधान उसके प्रकृतिक वातावरण में रहते हुए ही किया जा सकता है।" - स्टीवेन्सन

"प्रोजेक्ट कार्य की एक इकाई है, जिसमें छात्रों को कार्य की योजना और सम्पन्नता के लिए उत्तरदायी बनाया जाता है।" - पार्कर

"प्रोजेक्ट वास्तविक जीवन का एक छोटा सा अंश होता है जिसे विद्यालय में संपादित किया जाता है - बैलार्ड

योजना विधि के सोपान - योजना विधि के निम्न चरण होते हैं-

- अधिगम परिस्थितियों का निर्माण करना।
- योजना का चयन करना।
- योजना का क्रियान्वयन करना।
- योजना का मूल्यांकन करना।
- कार्य का लेखा - जोखा करना।

विधि के सिद्धांत - योजना विधि निम्न सिद्धांतों पर आधारित होती है -

- रुचि का सिद्धांत।
- आवश्यकता का सिद्धांत।
- क्रियाशीलता का सिद्धांत।
- सामाजिक विकास का सिद्धांत।
- वास्तविकता का सिद्धांत।
- सामाजिक उपयोगिता या व्यावहारिकता का सिद्धांत।

योजनाओं के प्रकार -

योजनाएँ मुख्यतः दो प्रकार की होती हैं -

- a. व्यक्तिगत योजनाएँ - इनमें प्रत्येक छात्र को एक प्रोजेक्ट दे दिया जाता है, जिसे वह पूर्ण करता है। उदाहरणार्थ - मानचित्र, चित्र, समय - रेखा आदि का निर्माण करना।
 - b. सामूहिक योजनाएँ - इनमें छात्र एक - दूसरे के सहयोग से प्रोजेक्ट को पूर्ण करते हैं। उदाहरणार्थ - विद्यालय, पोस्ट ऑफिस, सहकारी दुकान एवं बैंक का संचालन। थॉमस एम. रिस्क ने अपनी पुस्तक 'Principles and Practices of Teaching Secondary Schools' में तीन प्रकार की योजनाओं का उल्लेख किया है यथा -
 - a. उत्पादनात्मक योजनाएँ - इनमें किसी भौतिक वस्तु का निर्माण किया जाता है, उदाहरणार्थ - मॉडल बनाना, खिलौने बनाना।
 - b. सीखने से संबंधित योजनाएँ - इनमें किसी रचनात्मक या सृजनात्मक क्रिया के माध्यम से ज्ञान का अर्जन किया जाता है, उदाहरणार्थ - किसी निबंध की रूपरेखा बनाना, सीखना, कहानी लिखना सीखना, प्रभावकारी ढंग से पढ़ना सीखना।
 - c. बौद्धिक या समस्यात्मक योजनाएँ - इनका मुख्य उद्देश्य किसी वस्तु की समझदारी प्राप्त करना होता है। इनमें किसी बौद्धिक समस्या का समाधान किया जाता है, उदाहरणार्थ - नगर अपनी सरकार को किस प्रकार से वित्तीय सहायता देती है?
- किलपैट्रिक ने अपनी पुस्तक 'Foundation of Teaching Method' में चार प्रकार की योजनाओं का उल्लेख किया है, यथा -
1. रचनात्मक योजनाएँ - इनमें किसी वस्तु की रचना पर बल दिया जाता है। उदाहरणार्थ - मॉडल बनाना, खिलौना बनाना, कविता लिखना आदि।
 2. रसास्वादानात्मक योजनाएँ - इनका उद्देश्य किसी कार्य द्वारा आनन्द प्राप्त करना या किसी वस्तु के सौंदर्य की

प्रिय दोस्तों, अब तक हमारे नोट्स में से विभिन्न परीक्षाओं में आये हुए प्रश्नों के परिणाम देखने के लिए क्लिक करें -  **(Proof Video Link)**

RAS PRE. 2021 - <https://shorturl.at/qBJ18> (74 प्रश्न , 150 में से)

RAS Pre 2023 - <https://shorturl.at/tGHRT> (96 प्रश्न , 150 में से)

UP Police Constable 2024 - <http://surl.li/rbfyn> (98 प्रश्न , 150 में से)

Rajasthan CET Gradu. Level - <https://youtu.be/gPqDNlc6UR0>

Rajasthan CET 12th Level - <https://youtu.be/oCa-CoTFu4A>

RPSC EO / RO - <https://youtu.be/b9PKjl4nSxE>

VDO PRE. - <https://www.youtube.com/watch?v=gXdAk856Wl8&t=202s>

Patwari - <https://www.youtube.com/watch?v=X6mKGdtXyu4&t=2s>

PTI 3rd grade - https://www.youtube.com/watch?v=iA_MemKKgEk&t=5s

SSC GD - 2021 - <https://youtu.be/2gz2fJyt6vI>

EXAM (परीक्षा)	DATE	हमारे नोट्स में से आये हुए प्रश्नों की संख्या
MPPSC Prelims 2023	17 दिसम्बर	63 प्रश्न (100 में से)
RAS PRE. 2021	27 अक्टूबर	74 प्रश्न आये
RAS Mains 2021	October 2021	52% प्रश्न आये

whatsapp - <https://wa.link/ny6pbb> 1 web.- <https://shorturl.at/livKO>

RAS Pre. 2023	01 अक्टूबर 2023	96 प्रश्न (150 में से)
SSC GD 2021	16 नवम्बर	68 (100 में से)
SSC GD 2021	08 दिसम्बर	67 (100 में से)
RPSC EO/RO	14 मई (1st Shift)	95 (120 में से)
राजस्थान S.I. 2021	14 सितम्बर	119 (200 में से)
राजस्थान S.I. 2021	15 सितम्बर	126 (200 में से)
RAJASTHAN PATWARI 2021	23 अक्तूबर (1st शिफ्ट)	79 (150 में से)
RAJASTHAN PATWARI 2021	23 अक्तूबर (2 nd शिफ्ट)	103 (150 में से)
RAJASTHAN PATWARI 2021	24 अक्तूबर (2 nd शिफ्ट)	91 (150 में से)
RAJASTHAN VDO 2021	27 दिसंबर (1 st शिफ्ट)	59 (100 में से)
RAJASTHAN VDO 2021	27 दिसंबर (2 nd शिफ्ट)	61 (100 में से)
RAJASTHAN VDO 2021	28 दिसंबर (2 nd शिफ्ट)	57 (100 में से)
U.P. SI 2021	14 नवम्बर 2021 1 st शिफ्ट	91 (160 में से)
U.P. SI 2021	21 नवम्बर 2021 (1 st शिफ्ट)	89 (160 में से)
Raj. CET Graduation level	07 January 2023 (1 st शिफ्ट)	96 (150 में से)
Raj. CET 12th level	04 February 2023 (1 st शिफ्ट)	98 (150 में से)
UP Police Constable	17 February 2024 (1 st शिफ्ट)	98 (150 में से)

& Many More Exams like UPSC, SSC, Bank Etc.

whatsapp - <https://wa.link/ny6pbb> 2 web.- <https://shorturl.at/livKO>