



INFUSION NOTES
WHEN ONLY THE BEST WILL DO

SSC EXAM



2022

LATEST
EDITION

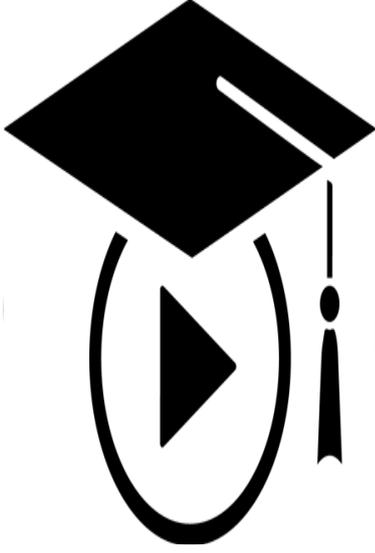
HANDWRITTEN
NOTES

SSC-CGL

STAFF SELECTION COMMISSION COMBINED GRADUATE LEVEL

(Pre. + Mains के लिए)

भाग - 4 गणित (संख्यात्मक अभियोग्यता)



INFUSION NOTES

WHEN ONLY THE BEST WILL DO

SSC-CGL

STAFF SELECTION COMMISSION
COMBINED GRADUATE LEVEL

भाग - 4

गणित (संख्यात्मक अभियोग्यता)

प्रस्तावना

प्रिय पाठकों, प्रस्तुत नोट्स “SSC CGL (COMBINED GRADUATE LEVEL)” को एक विभिन्न अपने अपने विषयों में निपुण अध्यापकों एवं सहकर्मियों की टीम के द्वारा तैयार किया गया है / ये नोट्स पाठकों को कर्मचारी चयन आयोग (SSC) द्वारा आयोजित करायी जाने वाली परीक्षा “SSC CGL (COMBINED GRADUATE LEVEL)” भर्ती परीक्षा में पूर्ण संभव मदद करेंगे /

अंततः सतर्क प्रयासों के बावजूद नोट्स में कुछ कमियों तथा त्रुटियों के रहने की संभावना हो सकती है / अतः आप सूचि पाठकों का सुझाव सादर आमंत्रित हैं/

प्रकाशकः

INFUSION NOTES

जयपुर, 302029 (RAJASTHAN)

मो : 01414045784, 8233195718

ईमेल : contact@infusionnotes.com

वेबसाइट : <http://www.infusionnotes.com>

Whatsapp करें - <https://wa.link/6z7do2>

Online order करें - <https://cutt.ly/9NCBSnA>

मूल्य :

संस्करण : नवीनतम (2022)

गणित (संख्यात्मक अभियोग्यता)

1. संख्या प्रणाली	1-8
2. इकाई अंक और भाजकता	9-34
3. लघुत्तम समापवर्त्य एवं महत्तम समापवर्तक	35-49
4. भिन्न एवं दशमलव	50-55
5. सरलीकरण	56-69
6. अनुक्रम और श्रृंखला	70-80
7. बीजगणित	81-120
8. अनुपात-समानुपात	121-131
9. प्रतिशतता	132-148
10. लाभ और हानि	149-164
11. औसत	165-177
12. साँझा	178-189
13. मिश्रण	190-202
14. साधारण ब्याज & चक्रवृद्धि ब्याज	203-226
15. चाल , समय और दूरी	227-237
16. कार्य और समय	238-251
17. क्षेत्रमिति	252-284

18. व्यामिति	285-304
19. त्रिकोणमिति	305-323
20. डाटा इन्टरप्रिटेसन	324-356
21. सांख्यिकी	357-381
22. प्रायिकता	382-388

अध्याय - 2

इकाई अंक और भाजकता

अंक ज्ञात करना -

523 → 3 अंक (n) संख्या : अर्ध पूर्ण 189

78965 → 5 अंक, अंक : 1,2,3,4,5,6,7,8,9,0,

1 → 9 = 9 संख्या × 1 अंक = 9 अंक (d)

= सभी अंक ज्ञात करे , संख्या 1 और 35 के बीच ?

$$1 \rightarrow 9 = 9N \times 1D = 9D$$

$$10 \rightarrow 35 = 26N \times 2D = \underline{52D}$$

$$61D$$

= संख्या 1 और 58 के बीच सभी अंक ज्ञात करे !

$$1 \rightarrow 9 = 9N \times 1D = 9D$$

$$10 \rightarrow 58 = 49N \times 2D = \underline{98D}$$

$$107D$$

= संख्या 1 और 79 के बीच सभी अंक ज्ञात करे !

$$1 \rightarrow 9 = 9N \times 1D = 9D$$

$$10 \rightarrow 79 = 70N \times 2D = \underline{140D}$$

$$149D$$

= संख्या 1 और 96 के बीच सभी अंक ज्ञात करे !

$$1 \rightarrow 9 = 9N \times 1D = 9D$$

$$10 \rightarrow 96 = 87N \times 2D = \underline{174D}$$

$$183D$$

= संख्या 1 और 99 के बीच सभी अंक ज्ञात करे !

$$1 \rightarrow 9 = 9N \times 1D = 9D$$

$$10 \rightarrow 99 = 90N \times 2D = \underline{180D}$$

$$189D$$

= संख्या 1 और 123 के बीच सभी अंक ज्ञात करे !

$$1 \rightarrow 99 \rightarrow 99N \rightarrow 189D$$

$$100 \rightarrow 123 \rightarrow 24N \times 3D \rightarrow \underline{72D}$$

$$261D$$

= संख्या 1 और 187 के बीच सभी अंक ज्ञात करे !

$$1 \rightarrow 99 \rightarrow 99N \rightarrow 189D$$

$$100 \rightarrow 187 \rightarrow 88N \times 3D \rightarrow \underline{264D}$$

$$453D$$

= संख्या 1 और 527 के बीच सभी अंक ज्ञात करे

$$1 \rightarrow 99 \rightarrow 99N \times 1D = 189D$$

$$100 \rightarrow 527 \rightarrow 428N \times 3D = \underline{1284D}$$

$$1473D$$

= संख्या 1 और 896 के बीच सभी अंक ज्ञात करे

$$1 \rightarrow 99 \rightarrow 99N \times 1D = 189D$$

$$100 \rightarrow 896 \rightarrow 797 \times 3D = \underline{2391D}$$

$$2580D$$

$$1 \rightarrow 9 \rightarrow 9D$$

$$1 \rightarrow 99 \rightarrow 189D$$

= संख्या 1 और 999 के बीच सभी अंक ज्ञात करे

$$1 \rightarrow 99 \rightarrow 99N \rightarrow 189D$$

$$100 \rightarrow 999 \rightarrow 900N \times 3D \rightarrow \underline{2700D}$$

$$2889D$$

= संख्या 1 और 1284 के बीच सभी अंक ज्ञात करें

$$1 \rightarrow 999 \rightarrow 999N = 2889D$$

$$1000 \rightarrow 1284 \rightarrow 285N \times 4D = \underline{1140D}$$

$$4029D$$

= संख्या 1 और 8122 के बीच सभी अंक ज्ञात करें

$$1 \rightarrow 999 \rightarrow 999N = 2889D$$

$$1000 \rightarrow 8122 \rightarrow 7123N \times 4D = \underline{28492D}$$

$$31381D$$

= संख्या 1 और 9999 के बीच सभी अंक ज्ञात करें

$$1 \rightarrow 999 \rightarrow 999N = 2889D$$

$$1000 \rightarrow 9999 \rightarrow 9000N \times 4D = \underline{36000D}$$

$$38889D$$

$$1 \rightarrow 9 \rightarrow 9N \rightarrow 9D$$

$$1 \rightarrow 99 \rightarrow 99N \rightarrow 189D$$

$$1 \rightarrow 999 \rightarrow 999N \rightarrow 2889D$$

$$1 \rightarrow 9999 \rightarrow 9999N \rightarrow 38889D$$

$$1 \rightarrow 99999 \rightarrow 99999N \rightarrow 488889D$$

= नीचे दिये गये अंको की संख्या से अंतिम तीन अंक ज्ञात करें !

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \text{ -----} \underline{27} \ \underline{28} \ \underline{29}, \ 49 \ d$$

$$1 \rightarrow 9 = 9N \times 1D = 9D \quad 49$$

$$10 \rightarrow \underline{20N \times 2D} \quad \underline{-9}$$

$$29D$$

$$40D$$

$$\text{अंतिम तीन अंक} = 829$$

= नीचे दिये गए अंको की संख्या से अंतिम तीन अंक ज्ञात करें !

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ \text{-----} \underline{46} \ \underline{47} \ \underline{48} \quad 87 \text{ digit (अंक)}$$

$$1 \rightarrow 9 \rightarrow 9N \times 1D = 9D \quad 87D$$

$$10 \rightarrow \underline{39N \times 2D} = 78D \quad \underline{-9D}$$

$$4N$$

$$78D$$

$$\text{अंतिम तीन अंक} = 748$$

$$2$$

= नीचे दिये गये अंको की संख्या से अंतिम तीन अंक ज्ञात करें !

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ \text{-----} \underline{42} \ \underline{43} \ \underline{4} \quad 78d$$

$$1 \rightarrow 9 = 9N \times 1D = 9D \quad 78D$$

$$10 \rightarrow \underline{34N \times 2D} = 69D \quad \underline{-9D}$$

$$43N + 1D$$

$$69D$$

$$2$$

$$\text{अंतिम तीन अंक} = 434 = 34N + 1D$$

= नीचे दिये गये अंको की संख्या से अंतिम पांच अंक ज्ञात करें !

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ \text{-----} \underline{85} \ \underline{86} \ \underline{8} \quad 164 \text{ digit}$$

$$1 \rightarrow 9N \rightarrow 9D \quad 164$$

$$10 \rightarrow \underline{77N + 1D} = 155D \quad \underline{-9}$$

$$86N + 1D$$

$$\frac{155D}{2}$$

$$\text{अंतिम पांच अंक} = 85868 = 77N + 1D$$

= नीचे दिये गए अंको की संख्या से अंतिम तीन अंक ज्ञात करें !

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ \text{-----}106\ 107\ 108\ 1\quad 217D$$

$$1 \rightarrow 99N \rightarrow 189D \quad 217D$$

$$100 \rightarrow 9N \times 3D \rightarrow 28D \quad 189D$$

$$108N + 1D \quad \frac{28D}{3}$$

$$\text{अंतिम तीन अंक} = 081 \quad 9N + 1D$$

= नीचे दिये गए अंको की संख्या से अंतिम तीन अंक ज्ञात करें !

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ \text{-----}90\ 91\quad 173\ \text{digit}$$

$$1 \rightarrow 9N \rightarrow 9D \quad 173$$

$$10 \rightarrow 82N \times 2D \quad -9$$

$$91N \quad \frac{164}{2} = 82N$$

$$\text{अंतिम तीन अंक} = 091$$

= नीचे दिये गये अंको की संख्या से अंतिम पांच अंक निकालें !

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ \text{----}107\ 108\ 10\quad 218\ \text{digit}$$

$$1 \rightarrow 99 = 99N = 189D \quad 218$$

$$= 9N \times 3D = 29D \quad -189$$

$$108N + 2D \quad 29D$$

$$\text{अंतिम पांच अंक} = 10810$$

= नीचे दिये गए अंको की संख्या से अंतिम चार अंक निकालें !

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ \text{----}207\ 208\ 20\quad 518\ \text{digit}$$

$$1 \rightarrow 99 = 99N = 189D \quad 518$$

$$100 \rightarrow 109N \times 3D = \quad -189$$

$$208N + 2D \quad \frac{329D}{3}$$

$$\text{अंतिम चार अंक} = 0820 \quad = 109 + 2D$$

= नीचे दिये गए अंको की संख्या से अंतिम पांच अंक निकालें !

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ \text{-----}1063\ 1064\ 1\quad 3150\ \text{digit}$$

$$1 \rightarrow 999 \rightarrow 999N = 2889D \quad -2889$$

$$1000 \rightarrow (65N + 1D) \quad \frac{261D}{4}$$

$$1064N + 1D = 65N + 1D$$

$$\text{अंतिम पांच अंक} = 10641$$



$2^1 \rightarrow 2 \rightarrow$ अंतिम एक अंक अगर 2 से विभाजित हो

$2^2 \rightarrow 4 \rightarrow$ अंतिम दो अंक अगर 2 से विभाजित हो

$2^3 \rightarrow 8$

$2^4 \rightarrow 16$

$2^5 \rightarrow 32$

$2^6 \rightarrow 64$

$2^7 \rightarrow 128$

$2^n \rightarrow$ अंतिम n अंक अगर 2^n से विभाजित हो



$5^1 \rightarrow$ अंतिम एक अंक अगर 5 से विभाजित हो

$5^2 \rightarrow$ अंतिम दो अंक अगर 5 से विभाजित हो

$5^3 \rightarrow$ अंतिम तीन अंक अगर 5 से विभाजित हो

$5^4 \rightarrow$

$5^5 \rightarrow$

$5^6 \rightarrow$

:

:

0000 ,0009 ,0018 -----9999

$$\frac{9999-0}{9} + 1$$

$$= 1111 + 1 = 1112$$

= 9 से विभाजित 6 अंको की कुल कितनी संख्याएँ संभव हैं यदि पहला और तीसरा अंक 4 और 5 हो

4	x	5	y	z	w
---	---	---	---	---	---

0000 ,0009 ,0018 -----9999

$$\frac{9999-0}{9} + 1$$

$$= 1111 + 1$$

$$= 1112$$

$1^2 < 2^1$
 $2^3 < 3^2$

Exception

$$3^4 > 4^3 \quad 70^{71} > 71^{70}$$

$$4^5 > 5^4 \quad 75^{76} > 76^{75}$$

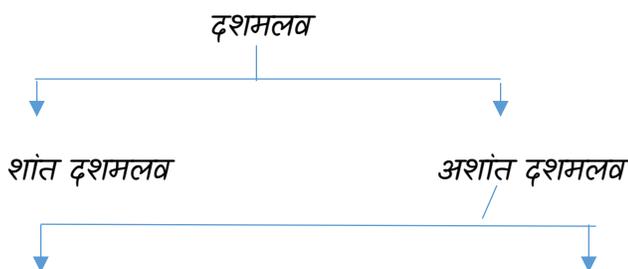
$$5^6 > 6^5 \quad 100^{101} > 101^{100}$$

$$6^7 > 7^6 \quad \boxed{78^{79} > 79^{78}}$$

$$7^8 > 8^7$$

$$8^9 > 9^8$$

$$9^{10} > 10^9$$



आवर्ती दशमलव

अनावर्ती दशमलव

5. 6777-----

5. 683245

0.888-----

18. 373737-----

(1) नीचे दिये गए expression को solve करें !

$$\frac{38729}{6250} + \frac{11}{128} + \frac{27}{15625}$$

- (a) 6.1298
- (b) 7. 3196011837
- (c) 6.2843055
- (d) 6.284307

$$\frac{38729}{5^5 \times 2} + \frac{11}{2^7} + \frac{27}{5^6}$$

-5
-6
-7

पुनरावृत्ति वाली भिन्न को साधारण भिन्न में बदलना:-

1. पुनरावृत्ति (बार) वाली दशमलव भिन्न को साधारण भिन्न में बदलने के लिए जितनी संख्याओं पर बार है तो उतने ही बढ़ा में 9 लिख देते हैं।
2. दशमलव के दाईं तरफ यानी दशमलव के बाद में जितने अंको पर बार नहीं है, उतने ही 0 बढ़ा में 9 के पीछे लगा देते हैं।
3. दशमलव के बाद जितने अंक पर बार नहीं है, उसके पूरे मान को पूरी संख्या में से घटा देते हैं और अंश के रूप में लिख देते हैं।
4. उदाहरण :- $0.4\bar{6}$ को साधारण भिन्न में बदलो ?

हल :- $0.4\bar{6} = \frac{46-4}{90} = \frac{42}{90}$

(∴ दशमलव के बाद 2 अंक हैं और एक पर बार है।
 अतः हर में एक 90 आया और बिना बार वाली संख्या
 (4) को 46 में से घटाकर अंश में लिखते हैं।)

उदाहरण :- $0.0\overline{123}$ को साधारण भिन्न में बदलो ?

हल :- $0.0\overline{123} = \frac{123}{9990}$
 (बिना बार वाला 0 है अतः 123 में से 0 घटाने पर 123 ही आया) और तीन अंकों पर बार है अतः 9 तीन बार आया है।

उदाहरण:- $7.\overline{54}$ को साधारण भिन्न में बदलो ?

हल :- $7.\overline{54} = 7\frac{54}{99}$
 (दशमलव के बाद के पूरे अंकों पर बार है इसलिए घटाने के लिए कुछ नहीं होगा, अतः 54 को ही अंश में लिखेंगे)
 ∴ दो अंको पर बार है अतः हर में 9 दो बार आएगा तथा दशमलव के दाईं तरफ आयी संख्या (7) भागफल के रूप में भिन्न के आगे आयेगी।

उदाहरण :- $0.6\overline{47}$ को साधारण भिन्न में बदलो ?

हल :- $0.6\overline{47} = \frac{647-6}{990} = \frac{641}{990}$
 दो अंकों पर बार है अतः 9 दो बार आयेगा और दशमलव के बाद एक अंक (6) पर बार नहीं है अतः हर में एक 0 आयेगा।

महत्त्वपूर्ण सूत्र

$\Rightarrow 5.\overline{6}$ या $5.666.....$ या $5\frac{6}{9}$ या $5\frac{2}{3}$ या $\frac{17}{3}$
 $\Rightarrow 2.\overline{43}$ या $2.434343.....$ या $2\frac{43}{99}$ या $\frac{241}{99}$
 $\Rightarrow 3.\overline{413}$ या $3.413413.....$ या $3\frac{413}{999}$ या $\frac{3410}{999}$
 $\Rightarrow 4.\overline{52}$ या $4.52222.....$ या $4\frac{52-5}{90}$ या $4\frac{47}{90}$ या $\frac{407}{90}$
 $\Rightarrow 6.\overline{543}$ या $6.5434343.....$ या $6\frac{543-5}{990}$ या $6\frac{538}{990}$ या $\frac{6478}{990}$
 $\Rightarrow 4.6\overline{145}$ या $4.614545.....$ या $4\frac{6145-61}{9900}$ या $4\frac{6084}{9900}$
 या $\frac{45684}{9900}$

कुछ उदाहरण :-

1. $0.\overline{7} = \frac{7}{9}$

2. $0.7\overline{9} = \frac{79-7}{90} = \frac{72}{90}$

3. $0.\overline{74} = \frac{74}{99}$

4. $0.5\overline{89} = \frac{589-5}{990}$

5. $0.\overline{745} = \frac{745}{999}$

6. $0.5\overline{89} = \frac{589-58}{999}$

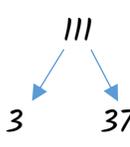
7. $0.\overline{83126} = \frac{83126}{99999}$

8. $0.0\overline{869} = \frac{869-086}{9000} = \frac{783}{9000}$

9. $0.\overline{58} = \frac{58}{99}$

10. $\sqrt[3]{0.037} = ?$

$\sqrt[3]{\frac{1}{3^3}} = 0.\overline{037} = \frac{37}{999}$
 $= \frac{37}{27 \times 37}$



$9 \times 3 \times 37$

27×37

11. $\frac{1}{3} = \boxed{0.\overline{3}} = \frac{1}{3}$

12. $0.\overline{37} + 8.5\overline{6} + 1.2\overline{3} = ?$

$\frac{37}{99} + 8 + \frac{56}{99} + 1 + \frac{23}{99}$

$9 + \frac{37+56+23}{99}$

$9 + \frac{116}{99}$

$10 + \frac{17}{99}$

$10 + 0.17 = 10.\overline{17}$

13. $3.\overline{98} + 5.\overline{26} + 16.\overline{31} = ?$

$= 3 + \frac{98}{99} + 5 + \frac{26}{99} + 16 + \frac{31}{99}$

$= 24 + \frac{98+26+31}{99}$

$= 24 + 1 + \frac{56}{99}$

$$= 25 + 0.56$$

$$= 25.\overline{56}$$

14. $2.\overline{6} - 1.\overline{9} = ?$

$$= 2 + 0.\overline{6} - 1 - 0.\overline{9}$$

$$= 1 + \frac{6}{9} - \frac{9}{9}$$

$$= 1 - \frac{3}{9}$$

$$= \frac{6}{9} = \boxed{0.\overline{6}}$$

15. $0.\overline{87} + 0.\overline{359} = ?$

$$\frac{87}{99} + \frac{359}{999}$$

$$\frac{87 \times 111 + 359 \times 11}{10989}$$

$$= 1.23814723815$$

16. $0.\overline{856} + 3.\overline{747} + 5.\overline{875} = ?$

L.C.M (जितने पर बार है!) 2 digit पर बार

X X X	X X	X X X	2 digit
-------	-----	-------	---------

0.856	5 6	5 6 5----	1 digit
-------	-----	-----------	---------

3.747	4 7	4 7 4 --	(2,1)-
-------	-----	----------	--------

5.875	6 6	6 6 6----	Lcm
-------	-----	-----------	-----

10.479	7 0	7 0 5	= 2
--------	-----	-------	-----

$$\boxed{10.479\overline{70}}$$

इतने digit बीच में

17. $0.\overline{87} + 0.\overline{359} = ?$

• L.C.M

. X X X X X X	X X X----
---------------	-----------

0.878787	8787
----------	------

0.359359	3593
----------	------

1.238147	238
----------	-----

$$1.\overline{238147}$$

18. $123.\overline{45678} + 3.\overline{4567} + 2.\overline{8} = ?$

4,1,0 L.C.M

X X X X	X X X	X X X---
---------	-------	----------

123.4567	888	888
----------	-----	-----

3.4567	567	567
--------	-----	-----

2.8888	888	888
--------	-----	-----

129.8024	345	343
----------	-----	-----

$$129.8024\overline{345}$$

19. $22.\overline{4} + 11.\overline{567} - 33.\overline{59} = ?$

L.C.M(1,2,1)

X	X X	X X X
---	-----	-------

22.4	44	444
------	----	-----

11.5	67	676
------	----	-----

-33.5	99	999
-------	----	-----

00.4	12	121
------	----	-----

$$0.4\overline{12}$$

9 की विभाज्यता जाँचने के लिए -

$$6 + 5 + 3 + x + 0 = (14 + x) \text{ विभाजित होगा 9 से यदि } x = 4 \text{ होगा तब}$$

$$\text{अतः } x + y = 4 + 0 = 4 \text{ Ans.}$$

11 से भाजकता का नियम- जिस संख्या के सम स्थानों के अंको और विषम स्थानों के अंको का अंतर 0 या 11 से विभाज्य हो तो वह संख्या 11 से विभाजित होगी।

$$\text{जैसे:- } 95744 \text{ (} 9+7+4 \text{)-(} 5+4 \text{)} = 20-9=11$$

इनका अंतर 11 से भाज्य है तो यह संख्या भी 11 से भाज्य होगी।

Note :- यदि कोई संख्या 6 बार एक ही अंक की पुनरावृत्ति से बनी हो तो वह संख्या 3, 7, 11, 13 व 37 से पूर्णतः विभाजित होती है।

Q. यदि एक 5 अंकीय संख्या $676xy3$, 7 और 11 से विभाज्य तो $(3x - 5y)$ का मान ज्ञात कीजिए।

(SSC-CGL-2021)

1. 9
2. 11
3. 10
4. 7

Ans.(1) 9

$676xy3$, 7 और 11 से विभाज्य है।

क्योंकि $676xy3$, 7 और 11 से विभाज्य है, तो यह 3, 7 और 11 के लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) से भी विभाज्य होगा।

भाज्य = भाजक x भागफल + शेषफल

$$(3, 7, 11) \text{ LCM} = 231$$

5 अंको की सबसे बड़ी संख्या 67699 लेकर उसे 231 से भाग देने पर।

$$67699 = 231 \times 293 + 16$$

$$= 67699 = 67683 + 16 =$$

$$67699 - 16 = 67683 \text{ (231 से पूर्णतः विभाज्य)}$$

$$\therefore 67683 = 676xy \text{ (जहाँ } x = 8, y = 3 \text{)}$$

$$(3x - 5y) = 3 \times 8 - 5 \times 3 = 24 - 15 = 9 \text{ Ans.}$$

इकाई अंक कैसे निकाले

जिस संख्या का इकाई अंक 0, 1, 5, 6 हो उसका इकाई अंक सेम यही रहेगा।

- 0, 1, 5, 6 के अतिरिक्त दूसरा हो तो

जैसे $(352)^{67}$ का इकाई अंक

1st घात में 1 कम करेंगे - 66

II - 1 कम करके 4 का भाग देंगे $\frac{66}{4}$

III - 4 का भाग देकर शेष निकालेंगे - $\frac{66}{4} = 2$ शेष

IV - संख्या इकाई अंक देखेंगे - 2

V - अब 2 की बात (शेष +1) चढ़ाएंगे

VI - यही हमारा इकाई अंक है - $(2)^3 = 8$

महत्वपूर्ण सूत्र:-

A. लगातार n तक की प्राकृत संख्याओं का योग = $\frac{n(n+1)}{2}$

B. लगातार n तक की प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योग = $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

C. लगातार n तक की प्राकृत संख्याओं के घनो का योग $= \{n(n+1)/2\}^2$

D. लगातार n सम संख्याओं का योग $= (n+1)$

E. लगातार n विषम संख्याओं का योग $= n^2$

1. $\frac{1}{2}$ तथा $\frac{3}{5}$ के मध्य एक परिमेय संख्या है?

- (A) $\frac{2}{5}$
(B) $\frac{7}{2}$
(C) $\frac{3}{1}$
(D) $\frac{1}{3}$

हल - $\frac{4}{7}$ विकल्प से जिसका भागफल $\frac{1}{2}$ तथा $\frac{3}{5}$ के बीच हो

1. दो संख्याओं का योग 40 है तथा उनका अन्तर 6 है तो बड़ी संख्या क्या होगी ?

बड़ी संख्या = योग+अन्तर / 2

$$= \frac{40 + 6}{2} = 23$$

छोटी संख्या = योग-अन्तर/2

$$= \frac{40 - 6}{2} = 17$$

2. दो संख्याओं का योग 75 है और उनका अन्तर 25 है तो दोनों संख्याओं का गुणनफल ?

$$\frac{75+25}{2} = 50 \text{ बड़ी}$$

$$\frac{75-25}{2} = 25 \text{ छोटी}$$

$$= 50 \times 25 = 1250$$

3. दो संख्याओं का योग 8 तथा गुणनफल 15 है तो उनके व्युत्क्रमों का योग ?

चाहे योग पूछे या अन्तर, गुणनफल नीचे रखना है ।

= 8/15 Ans.

4. यदि किसी संख्या को 114 से भाग देने पर 21 शेष बचता है यदि उसी संख्या को 19 से भाग देने पर कितना शेष बचेगा ?

5. यदि किसी संख्या को 25 से भाग दिया जाए तो 7 शेष बचता है यदि उसी संख्या को 5 से भाग दिया जाए तो शेष ?

6. यदि किसी संख्या को 35 से भाग दिया जाए तो 4 शेष बचता है यदि उस संख्या के वर्ग को 5 से भाग दिया जा तो शेष ? $\frac{(4)^2}{5} = \frac{16}{5} = 1$ शेष

इकाई अंक कैसे निकाले :-

किसी संख्या का इकाई अंक ज्ञात करने के लिए दी हुई संख्याओं के इकाई अंकों की गुणा करते हैं ।

उदाहरण :- $128 \times 287 \times 542 \times 54$ में इकाई अंक क्रमशः 8, 7, 2, 4 हैं जिनका गुणा करने पर हमें 448 प्राप्त होता है जिसके इकाई का अंक 8 है । अतः $128 \times 287 \times 542 \times 54$ का गुणा करने पर गुणनफल में इकाई का अंक 8 होगा ।

Note :- ऐसे प्रश्नों को सरल तरीके से करने के लिए पहले कोई दो संख्याओं के इकाई अंकों की गुणा करते हैं और प्राप्त गुणनफल में इकाई अंक को अगली संख्या के इकाई के अंक से गुणा करते हैं । और यही प्रक्रिया दोहराते हैं ।

जैसे :- $128 \times 287 \times 542 \times 54$ में इकाई अंक क्या है ?

= $8 \times 7 \times 2 \times 4$ ($128 \times 287 \times 542 \times 54$ में इकाई अंक लेने पर)

= $56 \times 2 \times 4$ (प्रथम दो का गुणा करने पर)

= $6 \times 2 \times 4$ (56 में इकाई का अंक लेने पर)

= 12×4 (प्रथम दो का गुणा करने पर)

= 2×4 (12 में इकाई का अंक लेने पर)

= 8 (यही 128 × 287 × 542 × 54 में इकाई का अंक है)

घातांक वाली संख्याओं में इकाई अंक ज्ञात करना-

जिस संख्या का इकाई अंक 0,1,5,6 हो उसका इकाई अंक सेम यही रहेगा।

- 0,1,5,6 के अतिरिक्त दूसरा हो तो

जैसे (352)⁶⁷ का इकाई अंक

Ist घात में 1 कम करेंगे - 66

II- 1 कम करके 4 का भाग देंगे $\frac{66}{4}$

III - 4 का भाग देकर शेष निकालेंगे - $\frac{66}{4} = 2$ शेष

IV - संख्या इकाई अंक देखेंगे - 2

V - अब 2 की बात (शेष +1) चढ़ाएंगे

VI - यही हमारा इकाई अंक है - (2)³ = 8

इकाई अंक

टाइप -01	no/ power	1	2	3	4
(---0) ⁿ = 0	3	3	9	7	1
(---1) ⁿ = 1	5	5	5	5	5
(---5) ⁿ = 5	7	7	9	3	1
(---6) ⁿ = 6	2	2	4	8	6
	6	6	6	6	6
	8	8	4	2	6
	4	4	6	4	6

0,1,5,6 - No change

$$x^{19} = x^3$$

$$x^{37} = x^1$$

$$x^{40} = x^4$$

$$x^{50} = x^2$$

नीचे दिये गए expression में इकाई अंक 5 है तो x के संभव मान ज्ञात करें ?

$$x^{73} - x^{37}$$

$$x^1 - x^1 = 0$$

x के लिये कोई भी संभव मान नहीं है जिसके इकाई अंक 5 है !

टाइप -02

	odd	even
4	4	6
9	9	1

$$4^{40} = 6$$

$$9^{8/763} = 9$$

$$4^{41} = 4$$

$$9^{70} = 1$$

टाइप -03

$$3^{81} = 3$$

$$3^{82} = 3^2 = 9$$

$$3^{83} = 3^3 = 7$$

(19) $(8735^{827} + 1693^{469}) \times (7339^{1256} \times 244^{311}) \times 5827^{985}$ में इकाई अंक क्या होगा ?

- (a) 2
- (b) 6
- (c) 4
- (d) 8

Ans (c)

$$(8735^{827} + 1693^{469}) \times (7339^{1256} \times 244^{311}) \times 5827^{985}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$(5 + 3) \times (1 \times 4) \times 7^1$$

$$8 \times 4 \times 7 = 4$$

(20) प्रथम 111 पूर्ण संख्याओं के योग का इकाई अंक क्या होगा ?

- (a) 4
- (b) 6
- (c) 5
- (d) 0

0, 1, 2, 3, ..., 110

$$= \frac{n(n+1)}{2} = \frac{110 \times 111}{2} = 55 \times 111 = 5$$

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots, n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1+3+5+7+\dots+n = n^2$$

$$2+4+6+8+\dots+n = n(n+1)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

(21) 287^{562581} का इकाई अंक क्या होगा ?

- (a) 5
- (b) 6
- (c) 7
- (d) 8

287^{562581}

$$7^1 = 7$$

(22) $(7493)^{263} \times 151^{29}$ में इकाई अंक क्या होगा ?

- (a) 3
- (b) 9
- (c) 7
- (d) 1

$$\Rightarrow (7493)^{263} \times 151^{29}$$

$$7 \times 1 = 7$$

Ans (c)

(23) $634^{262} + 634^{263}$ में इकाई अंक क्या होगा ?

- (a) 0
- (b) 1
- (c) 4
- (d) 6

Ans (a)

$$634^{262} + 634^{263}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$6 + 4 = 0$$

(24) यदि x एक धनात्मक पूर्णांक संख्या है, तो $(24)^{2x+1} \times (33)^{x+13} \times (17)^{x+2} \times (9)^{2x}$ का इकाई अंक क्या होगी ?

- (a) 4
- (b) 6
- (c) 7
- (d) 8

$$(24)^{2x+1} \times (33)^{x+13} \times (17)^{x+2} \times (9)^{2x}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$(24)^3 \times (33)^{14} \times (17)^3 \times 9^2$$

$$4 \times 9 \times 3 \times 1 = 8$$

(25) $3^{65} \times 6^{59} \times 7^{71}$ के गुणनफल का इकाई अंक बताइए !

- (a) 1

- (b) 2
(c) 4
(d) 6

$$3^{65} \times 6^{59} \times 7^{71}$$

$$3 \times 6 \times 3 = 4$$

(26) संख्या 30^{2928} का सबसे दायाँ गैर शून्य अंक क्या है ?

- (a) 1
(b) 3
(c) 7
(d) 9

$$30^{2928}$$

$$(3 \times 10)^{2928}$$

$$3^{2928} \times 10^{2928}$$

$$1 \text{-----} \times 2928$$

1

(27) $5^3 \times 2^3 \times 2^{998}$ में हजार के स्थिति पर अंक ज्ञात करें ?

- (a) 2
(b) 4
(c) 0
(d) 8

Ans (b)

$$5^3 \times 2^3 \times 2^{998}$$

$$10^3 \times \text{-----}4$$

$$\text{-----} 4000$$

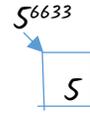
(28) 225^{6633} का इकाई अंक ज्ञात करें ?

- (a) 0
(b) 3
(c) 4

(d) None of these

Ans (d)

$$225^{6633}$$



Q.29 यदि एक 5 अंकीय संख्या $247xy$ 3, 7 और 11 से विभाज्य तो $(2y - 8x)$ का मान ज्ञात कीजिए ।

(SSC-CGL-2021)

क्योंकि $247xy$ 3, 7 और 11 से विभाज्य है, तो यह 3, 7 और 11 के लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) से भी विभाज्य होगा।

$$\text{भाज्य} = \text{भाजक} \times \text{भागफल} + \text{शेषफल}$$

$$(3, 7, 11) \text{ LCM} = 231$$

5 अंकों की सबसे बड़ी संख्या 24799 लेकर उसे 231 से भाग देने पर।

$$24799 = 231 \times 107 + 82$$

$$= 24799 = 24717 + 82$$

$$= 24799 - 82 = 24717 \text{ (231 से पूर्णतः विभाज्य)}$$

$$\therefore 24717 = 676xy \text{ (जहाँ } x = 1, y = 7)$$

$$(2y - 8x) = 2 \times 7 - 8 \times 1 = 14 - 8 = 6 \text{ Ans.}$$

अभ्यास प्रश्न

प्रश्न 1. प्रथम 11 क्रमिक सम संख्याओं के वर्गों का औसत क्या है ?

A. 184

B. 148

C. 186

D. 174

हल:

$$\frac{2^2+4^2+\dots+22^2}{11}$$

$$= \frac{2^2(1^2+2^2+\dots+11^2)}{11}$$

$$= \frac{4}{11} \times \frac{11(11+1)(2 \times 11+1)}{6} = \frac{4 \times 12 \times 23}{6} = 184$$

प्रश्न 2. दो अंकों की संख्या के अंकों का गुणनफल 24 है, यदि इसका इकाई का अंक दहाई के अंक के दुगुने से 2 अधिक है तो संख्या ज्ञात कीलिए।

A. 46

B. 64

C. 38

D. 21

हल:

माना दहाई का अंक X और इकाई का अंक Y है।

प्रश्नानुसार

$$\text{पहली शर्त } XY = 24$$

$$\text{दूसरी शर्त } 2X = Y - 2 \text{ या } Y = 2X + 2$$

$$\text{इसलिए } X(2X + 2) = 24$$

$$\text{समीकरण को हल करने पर } x = 3, y = 8$$

$$\text{इसलिए संख्या} = 10X + Y = 10 \times 3 + 8 = 38$$

प्रश्न 3. यदि प्रत्येक बच्चे को 10 आम दिये गये तो 3 आम बच गये लेकिन यदि प्रत्येक को 11 दिये गये तो 4 आम कम पड़े गये। तो आमों की संख्या थी।

A. 37

B. 73

C. 75

D. 57

हल:

मान लिया बच्चों की संख्या x है।

$$10x + 3 = 11x - 4$$

$$x = 7$$

$$\text{इसलिए आमों की संख्या} = 10 \times 7 + 3 = 73$$

प्रश्न 4. यदि किसी संख्या तथा इसके वर्ग का योग 182 है। तो वह संख्या क्या होगी?

A. -14

B. -15

C. 14

D. 15

हल:

प्रश्नानुसार

$$x + x^2 = 182$$

$$\text{हल करने पर } x = 13, -14$$

अतः अभीष्ट संख्या -14 होगी

प्रश्न 5. तीन क्रमागत सम संख्या का योग 114 है। तो मध्य संख्या क्या होगी?

A. 36

B. 38

C. 40

D. 42

हल:

मान लेते हैं कि पहली सम संख्या x है।

इसलिए दूसरी सम संख्या $x + 2$ और तीसरी सम संख्या $x + 4$ होगी।

प्रश्नानुसार

$$x + x + 2 + x + 4 = 114$$

$$x = 36$$

$$2 \times 2 + 1 = 5$$

$$5 \times 2 + 1 = 11$$

$$11 \times 2 + 1 = 23$$

$$23 \times 2 + 1 = 47$$

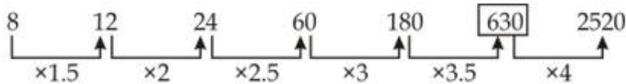
$$47 \times 2 + 1 = 95$$

$$95 \times 2 + 1 = 191$$

Q14. 8, 12, 24, 60, 180, 640, 2520

- (a) 60
(b) 180
(c) 2520
(d) 640
(e) 8

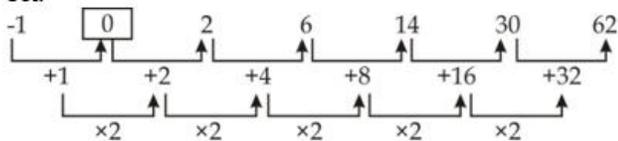
Ans(d)



Q15. -1, 1, 2, 6, 14, 30, 62

- (a) 1
(b) 62
(c) -1
(d) 14
(e) 30

Ans(a)



अध्याय - 7

बीजगणित

बीजगणित के सूत्र

- $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
- $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$
- $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
- $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$
- $(a + \frac{1}{a})^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} + 2$
- $(a + \frac{a}{a})^2 = (a - \frac{a}{a})^2 + 4$
- $(a - \frac{1}{a})^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} - 2$
- $(a - \frac{a}{a})^2 = (a + \frac{a}{a})^2 - 4$
- $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$
- $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + 4\sqrt{ab}$
- $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$
- $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - 4\sqrt{ab}$
- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
- $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$
- $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$
- $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$
- $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$
- $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$
- $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$
- $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2 - ab} = a + b$
- $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2 - ab} = \frac{1}{a + b}$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $\frac{a^3 - b^3}{a^2 + b^2 + ab} = a - b$
- $\frac{a^3 - b^3}{a^2 + b^2 + ab} = \frac{1}{a - b}$
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
- $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$
- $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(ab^2 + ac^2 + ba^2 + bc^2 + ca^2 + cb^2) + 2abc$

- $(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ca$
- $(a + b)^4 = a^4 + b^4 + 4a^3b + 4ab^3 + 6a^2b^2$
- $(a - b)^4 = a^4 + b^4 - 4a^3b - 4ab^3 + 6a^2b^2$

• यदि $x + \frac{1}{x} = a$ हो तो $x^2 + \frac{1}{x^2} = ?$
 $[x + \frac{1}{x}]^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \times x \times \frac{1}{x}$
 $a^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$
 $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$

Ex :- यदि $x + \frac{1}{x} = 7$ हो तो $x^2 + \frac{1}{x^2} = ?$

$x^2 + \frac{1}{x^2} = 7^2 - 2 = 49 - 2 = 47$ Ans.

इसका भाई

$x^2 - \frac{1}{x^2} = \sqrt{47^2 - 4}$
 $= \sqrt{2909 - 4} = \sqrt{2905}$

• यदि $x + \frac{1}{x} = a$ हो तो $x^4 + \frac{1}{x^4} = ?$

$x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$

$x^4 + \frac{1}{x^4} = (a^2 - 2)^2 - 2 = a^4 - 4a^2 + 2$

Ex :- यदि $x + \frac{1}{x} = 5$ हो तो $x^4 + \frac{1}{x^4} = ?$

$x^4 + \frac{1}{x^4} = (5^2 - 2)^2 - 2 = (25 - 2)^2 - 2$

$= 23^2 - 2 = 529 - 2 = 527$ Ans.

• यदि $x - \frac{1}{x} = a$ हो तो $x^4 + \frac{1}{x^4} = ?$

$x^4 + \frac{1}{x^4} = (a^2 + 2)^2 - 2$

$x^4 + \frac{1}{x^4} = a^4 + 4a^2 + 2$

Ex :- $x - \frac{1}{x} = 3$ हो तो $x^4 + \frac{1}{x^4} = ?$

$x^4 + \frac{1}{x^4} = (3^2 + 2)^2 - 2$

$(9 + 2)^2 - 2 = 11^2 - 2$

$121 - 2 = 119$

• यदि $x^2 + \frac{1}{x^2} = a$ हो तो $x + \frac{1}{x} = ?$

$[x + \frac{1}{x}]^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \times x \times \frac{1}{x}$

$[x + \frac{1}{x}]^2 = a + 2$

$x + \frac{1}{x} = \sqrt{a + 2}$

Ex :- यदि $x^2 + \frac{1}{x^2} = 50$ हो तो $x + \frac{1}{x} = ?$

हम जानते हैं की $x + \frac{1}{x} = \sqrt{a + 2}$

$x + \frac{1}{x} = \sqrt{50 + 2} = \sqrt{52}$ Ans.

• यदि $x - \frac{1}{x} = a$ हो तो $x^2 + \frac{1}{x^2} = ?$

$[x - \frac{1}{x}]^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \times x \times \frac{1}{x}$

$a^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$

$x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 + 2$

Ex :- यदि $x - \frac{1}{x} = 7$ हो तो $x^2 + \frac{1}{x^2} = ?$

$x^2 + \frac{1}{x^2} = 7^2 + 2 = 49 + 2 = 51$ Ans.

• यदि $x^2 + \frac{1}{x^2} = a$ हो तो $x - \frac{1}{x} = ?$

$[x - \frac{1}{x}]^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \times x \times \frac{1}{x}$

$[x - \frac{1}{x}]^2 = a - 2$

$x - \frac{1}{x} = \sqrt{a - 2}$

Ex:- यदि $x^2 + \frac{1}{x^2} = 50$ हो तो $x - \frac{1}{x} = ?$

हम जानते हैं की $x - \frac{1}{x} = \sqrt{a - 2}$

$x - \frac{1}{x} = \sqrt{50 - 2} = \sqrt{48}$ Ans.

त्रिकोणमिति और बीजगणित में घात तिगुनी करने का अर्थ होता है घन करना

घन करना है तो घन ही करो लेकिन साथ में \pm तिगुना लिखो और चिन्ह उल्टा लगा दो !

Ex :- यदि $x + \frac{1}{x} = 5$ हो तो $x^3 + \frac{1}{x^3} = ?$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 5^3 - 5 \times 3 = 110 \text{ Ans.}$$

किसी भी संख्या के उपर 0 घात लगाने का परिणाम गणित में 1 माना जाता है !

जैसे :- $2^0 = 1$

त्रिकोणमिति और बीजगणित में घात तिगुनी करने का अर्थ होता है घन करना :-

घन करना हो तो घन ही करो साथ में \pm तिगुना लिखो और चिन्ह उल्टा लगावो !

त्रिकोणमिति और बीजगणित में व्युत्क्रम संख्याओं का घनमूल ज्ञात करने का तरीका :-

(1) + वाला घनमूल :- तुरन्त बड़ी संख्या का घनमूल

(2) - वाला घनमूल :- तुरन्त छोटी संख्या वाला का घनमूल

Ex:- यदि $x + \frac{1}{x} = 3$ तो $x^5 + \frac{1}{x^5} = ?$

$$\text{हम जानते हैं} - x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$$

$$\text{तो } x^2 + \frac{1}{x^2} = 3^2 - 2 = 9 - 2 = 7$$

इसी प्रकार

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 3^3 - 3 \times 3 = 27 - 9 = 18$$

$$\text{अब } x^5 + \frac{1}{x^5} = [x^2 + \frac{1}{x^2}][x^3 + \frac{1}{x^3}] - [x + \frac{1}{x}]$$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = 18 \times 7 - 3$$

$$= 126 - 3 = 123 \text{ Ans.}$$

Ex:- यदि $x + \frac{1}{x} = 4$ तो $x^5 + \frac{1}{x^5} = ?$

(SSC-CGL-2021)

1. 776

2. 773

3. 724

4. 684

Ans(3) 724

$$\text{हम जानते हैं} - x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$$

$$\text{तो } x^2 + \frac{1}{x^2} = 4^2 - 2 = 16 - 2 = 14$$

इसी प्रकार

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 4^3 - 3 \times 4 = 64 - 12 = 52$$

$$\text{अब } x^5 + \frac{1}{x^5} = [x^2 + \frac{1}{x^2}][x^3 + \frac{1}{x^3}] - [x + \frac{1}{x}]$$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = 52 \times 14 - 4$$

$$= 728 - 4 = 724 \text{ Ans.}$$

Ex:- यदि $x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$ तो $x + \frac{1}{x} = ?$

यह हमें 18 से ठीक बड़ी घन वाली संख्या 27 का घनमूल करने पर प्राप्त होगा !

$$\sqrt[3]{27} = 3,$$

क्योंकि प्रश्न में + का चिन्ह है इसलिए 18 से बड़ी घन संख्या देखी !

$$\text{अतः } x + \frac{1}{x} = \sqrt[3]{27} = 3 \text{ Ans.}$$

$$\text{Q.1 यदि } x^3 - \frac{1}{x^3} = 140 \text{ तो } x - \frac{1}{x} = ?$$

क्योंकि प्रश्न में - का चिन्ह है इसलिए यह हमें 140 से ठीक छोटी घन वाली संख्या 125 के घनमूल से प्राप्त होगी ।

$$\text{अतः } x - \frac{1}{x} = \sqrt[3]{125} = 5 \text{ Ans.}$$

अपूर्ण व्युत्क्रमों की घात बदलने के तरीके :-

Q.2 $3x + \frac{1}{8x} = 12$ हो तो $8x + \frac{1}{3x}$ का मान बताओ !

$3x + \frac{1}{8x} = 12$ में $\frac{8}{3}$ से गुणा करने पर,

$$\frac{8}{3} \times 3x + \frac{1}{8x} \times \frac{8}{3} = 12 \times \frac{8}{3}$$

$$8x + \frac{1}{3x} = 32 \text{ Ans.}$$

Q.3 $5x + \frac{1}{9x} = 20$ हो तो $9x + \frac{1}{5x} = ?$

का मान बताओ !

$5x + \frac{1}{9x} = 20$ में $\frac{9}{5}$ से गुणा करने पर,

$$9x + \frac{1}{5x} = 20 \times \frac{9}{5} = 36 \text{ Ans.}$$

$5x + \frac{1}{11x}$ और $11x + \frac{1}{5x}$ में आने वाले

परिणाम 5 : 11 के आने वाले अनुपात में प्राप्त होंगे !

यदि पहले वाले का परिणाम 5 है तो दूसरे का 11 unit आयेगा !

$$\text{Q.4 यदि } 7x + \frac{1}{9x} = 21 \text{ तो } 9x + \frac{1}{7x} = ?$$

$$9x + \frac{1}{7x} = 21 \times \frac{9}{7} = 27$$

$$\text{Q.5 यदि } 8x + \frac{1}{5x} = 24 \text{ तो } 5x + \frac{1}{8x} = ?$$

$$5x + \frac{1}{8x} = 24 \times \frac{5}{8} = 15$$

$$\text{Q.6 यदि } 3x + \frac{1}{2x} = 6 \text{ तो } 9x^2 + \frac{1}{4x^2} = ?$$

वर्ग करने पर,

$$9x^2 + \frac{1}{4x^2} = 36 - 2 \times \frac{3}{2} = 33 \text{ Ans.}$$

$$\text{Q.7 यदि } 3x + \frac{1}{2x} = 6 \text{ तो } 27x^3 + \frac{1}{8x^3} = ?$$

?

$$\text{घन } 27x^3 + \frac{1}{8x^3} = 216 - 18 \times \frac{3}{2}$$

$$= 216 - 27 = 189 \text{ Ans.}$$

$$\text{Q.8 } 5x + \frac{1}{2x} = 9 \text{ तो } 25x^2 + \frac{1}{4x^2} = ?$$

$$25x^2 + \frac{1}{4x^2} = 81 - 2 \times \frac{5}{2}$$

$$= 81 - 5 = 76 \text{ Ans.}$$

$$\text{Q.9 } 3x + \frac{1}{2x} = 9 \text{ तो } 9x^2 + \frac{1}{4x^2} = ?$$

$$3x + \frac{1}{2x} = 9 \text{ का वर्ग करने पर,}$$

$$\text{Now } 9x^2 + \frac{1}{4x^2} = 81 - 2 \times \frac{3}{2}$$

$$= 81 - 3 = 78 \text{ Ans.}$$

घन के लिए

$$\text{Q.10 } 2x + \frac{1}{3x} = 6$$

$$(1) \quad x + \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$$

यहाँ अन्त वर्गान्तर है !

$$= \frac{2 \times \text{योग}}{\text{अन्तर}} = \frac{2 \times 8}{2} = 8$$

$$(2) \quad x - \frac{1}{x} = + \frac{4\sqrt{\text{गुणा}}}{\text{अन्तर}}$$

$$= \frac{4\sqrt{15}}{2} = 2\sqrt{15}$$

Q.25 $x\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}} = x^{1.5} + \frac{1}{x^{1.5}}$ होता है !

पहचान - 1 :- इस प्रकार के प्रश्नों में दी गई संख्याएँ लगातार संख्याओं के रूप में होती हैं !

तरीका = बड़ी - छोटी

पहचान - 2 :- नीचे और बीच के चिन्ह + के होंगे !

type - 2

समान्तर श्रेणी रूप में (2 या 3 का अन्तर)

Q.26 $\frac{1}{\sqrt{441} + \sqrt{438}} + \frac{1}{\sqrt{438} + \sqrt{435}} + \frac{1}{\sqrt{435} + \sqrt{432}}$
+ ----- $\frac{1}{\sqrt{12} + \sqrt{9}}$

$$\frac{\sqrt{441} - \sqrt{438}}{3} + \frac{\sqrt{438} - \sqrt{435}}{3} + \frac{\sqrt{435} - \sqrt{432}}{3} + \dots$$

$$\frac{\sqrt{12} - \sqrt{9}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{441} - \sqrt{9}}{3} = \frac{21 - 3}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

$$= \frac{\text{बड़ी-छोटी}}{\text{अन्तर}}$$

पहचान :- इस प्रकार के प्रश्नों में सभी चिन्ह (+) के होते हैं लेकिन दी गई संख्याएँ समान्तर श्रेणी में मौजूद होती हैं !

तरीका = $\frac{\text{बड़ी-छोटी}}{\text{अन्तर}}$

Q . type - 1 बड़ी से छोटी

$$\frac{1}{\sqrt{144} + \sqrt{143}} + \frac{1}{\sqrt{143} + \sqrt{142}} + \frac{1}{\sqrt{142} + \sqrt{141}} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{\sqrt{37} + \sqrt{36}}$$

$$\sqrt{144} - \sqrt{143} + \sqrt{143} - \sqrt{142} + \sqrt{142} - \sqrt{141} - \dots - \sqrt{37} - \sqrt{36}$$

$$= \sqrt{144} - \sqrt{36} = 12 - 6 = 6$$

बड़ी - छोटी = 6

Q.27 $\frac{1}{\sqrt{100} + \sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{98}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{26} + \sqrt{25}}$

(a) 6 (c) 5

(b) 7 (d) 2

तरीका = $\frac{\text{बड़ी-छोटी}}{\text{अन्तर}}$

बड़ी - छोटी

solution :- $\sqrt{100} - \sqrt{25} = 10 - 5 = 5$

Note :- यदि किन्हीं दो संख्याओं के बीच + अथवा गुणा का चिन्ह हो तो उनका क्रम बदला जा सकता है ! यदि वे किसी अन्य व्यंजक connect नहीं हो !

type - 3 जब नीचे पूरे चिन्ह (-) के हो

$$\frac{1}{\sqrt{100} - \sqrt{99}} - \frac{1}{\sqrt{99} - \sqrt{98}} + \frac{1}{\sqrt{98} + \sqrt{97}} - \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{97} + \sqrt{96}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{26} + \sqrt{25}}$$

$$\sqrt{100} + \sqrt{99} - (\sqrt{99} + \sqrt{98}) + (\sqrt{98} + \sqrt{97}) - \dots - (\sqrt{26} + \sqrt{25})$$

$= \sqrt{100} + \sqrt{25} = 10 + 5 = 15$ यहाँ + का चिन्ह लास्ट form के पहले चिन्ह के हिसाब से आता है!

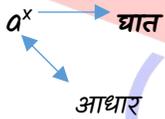
तरीका = बड़ी \pm छोटी

Q.28 $\frac{1}{\sqrt{289} - \sqrt{288}} - \frac{1}{\sqrt{288} - \sqrt{287}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{1}}$

- (a) 16 (c) 18
(b) 17 (d) इनमें से कोई नहीं

इस प्रश्न में नीचे के सभी चिन्ह (-) होते हैं लेकिन बीच के चिन्ह \pm एकान्तर रूप में बदलते हैं!

घात और आधार :-



$a^x = b \Rightarrow a = b^{1/x}$ या $a = \sqrt[x]{b}$

$b^{1/x} = \sqrt[x]{b}$ व $b^x = \sqrt[x]{b}$ व $b^{y/x} = \sqrt[x]{b^y}$

घातांक :-

यदि n एक घन पूर्णांक तथा a कोई वास्तविक संख्या हो तो

$a^n = a \times a \times a \times a \times a \times \dots \times a$ (n बार)

a^n को a का n वा घात कहा जाता है वास्तविक संख्या a को आधार तथा n को a के n वें घात का घातांक कहा जाता है।

घातांक के नियम

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $(ab)^n = a^n b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $a^0 = a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m} = 1$ (जिस संख्या की घात शून्य हो उसका मान 1 होता है)
- $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$ जैसे: $\frac{1}{5^{-2}} = 5^2$ (घातांक वाली संख्या को ऊपर या नीचे बदलने पर उसकी घात के चिन्ह (-,+) बदल जाते हैं।)
- $\left[\frac{a}{b}\right]^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $a^m + a^n + a^k = a^{m+n+k}$

जैसे :-

$2^1 \times 2^2 \times 2^3$
 $2^{1+2+3} = 2^6$

- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$
- $a^n + a^{n+m} \Rightarrow a^n(a^0 + a^m)$
जैसे - $6^{14} + 6^{14+2} \Rightarrow 6^{14}(6^0 + 6^2)$
 $\Rightarrow 6^{14}(1 + 36) = 37 \times 6^{14}$
- $a^n = a^m$ हो तो $n = m$ होगा, क्योंकि आधार समान है। इसलिए घात भी समान होगी।
- $a^n = b^n$ हो तो $a = b$ होगा, क्योंकि घातांक समान है। अतः आधार भी समान होगा।
- जब आधार व घातें समान नहीं हो -
 $a^n = b^m$ हो तो $a = b^{m/n}$ या $b = a^{n/m}$
जैसे - $9^{12} = x^4 \Rightarrow x = 9^{12/4} \Rightarrow x = 9^3$

करण (Surd)

जिस संख्या का मूल पूर्णतः ज्ञात नहीं किया जा सके, ऐसी संख्या के मूल को करणी (Surd) अथवा अमूलक संख्या (Irrational Quantity) कहते हैं।

जैसे- $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{4}$ आदि करणी (Surd) अथवा अमूलक संख्या हैं।

करण के प्रकार (Types of Surds)

- शुद्ध करणी (Pure Surds):- ऐसी करणी जिसका परिमेय गुणनखण्ड 1 हो शुद्ध करणी कहलाती है।

$$x^2 = 2 \sqrt[3]{4x} \quad x^5 = (2)^5$$

दोनों ओर घन करने पर $x = 2$

$$x^6 = 8 \times 4x$$

$$x^6 = 32x, \quad x^5 = 32$$

Type-2 $\sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a}}}}} \dots n \text{ times}$

$$X = a^{\frac{2^{n-1}}{2^n}} \quad n = \text{पदों की संख्या}$$

$$\sqrt{5 \sqrt{5 \sqrt{5}}}$$

$$= 5^{\frac{7}{8}}$$

$$\sqrt{7 \sqrt{7 \sqrt{7 \sqrt{7}}}}$$

$$= 7^{\frac{15}{16}}$$

$$\sqrt{3 \sqrt{3 \sqrt{3 \sqrt{3 \sqrt{3 \sqrt{3}}}}}}$$

$$= 3^{\frac{63}{64}}$$

Type-3

$$x = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots \infty}}}$$

$$x = \sqrt{a + x}$$

दोनों ओर वर्ग करने पर

$$x^2 = a + x$$

$$x^2 - x - a = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad a = 1, b = -1$$

$$= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} \quad c = -a$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x(-a)}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2} = \frac{\sqrt{4a + 1} + 1}{2}$$

$$x = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots \infty}}} = \frac{\sqrt{4a + 1} + 1}{2}$$

$$(1) \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \dots \infty}}} = \frac{\sqrt{4a + 1} + 1}{2}$$

$$a = 12$$

$$\frac{\sqrt{48 + 1} + 1}{2}$$

$$= \frac{7 + 1}{2}$$

$$= 4$$

2 Method

$$x = \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \dots \infty}}}}$$

3 4

$$x = 4$$

Note - ऐसे सभी प्रश्नों को हल करने के लिए जो संख्या दी गयी है उसके दो गुणनखण्ड करेंगे और जब + का चिन्ह है तो उत्तर बड़ी संख्या होगी !

Type-4

$$x = \sqrt{a - \sqrt{a - \sqrt{a - \sqrt{a - \sqrt{a - \dots}}}}} \dots \infty$$

$$x = \frac{\sqrt{4a+1}}{2}$$

(1)
$$x = \sqrt{12 - \sqrt{12 - \sqrt{12 - \sqrt{12 - \dots}}}} \dots \infty$$

$$x = \sqrt{12 - \sqrt{12 - \sqrt{12 - \dots}}}$$

$$x = \frac{\sqrt{4a+1}}{2}$$

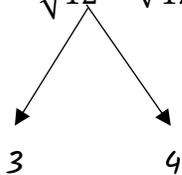
$$x = \frac{\sqrt{4 \times 12 + 1}}{2}$$

$$= \frac{7-1}{2}$$

$$= 3$$

2 Method

$$x = \sqrt{12 - \sqrt{12 - \sqrt{12 - \dots}}}$$



$$x = 3$$

(2)
$$x = \sqrt{72 - \sqrt{72 - \sqrt{72 - \sqrt{72 - \dots}}}} \dots \infty$$



$$x = 8$$

(3)
$$x = \sqrt{7 - \sqrt{7 - \sqrt{7 - \sqrt{7 - \dots}}}} \dots \infty$$

$$x = \frac{\sqrt{4a+1}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{28+1}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{29-1}}{2}$$

(4)
$$x = \sqrt{19 - \sqrt{19 - \sqrt{19 - \sqrt{19 - \dots}}}} \dots \infty$$

$$x = \sqrt{19 - \sqrt{19 - \sqrt{19 - \dots}}}$$

$$x = \frac{\sqrt{4a+1}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{76+1}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{77-1}}{2}$$

(5)
$$m = \sqrt{10 + \sqrt{10 + \sqrt{10 + \sqrt{10 - \dots}}}} \dots \infty$$

$$m = \frac{\sqrt{4a+1+1}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{4 \times 10 + 1 + 1}}{2} = \frac{\sqrt{41+1}}{2}$$

Type-5

$$m = \sqrt{a + \sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a - \sqrt{a}}}} \dots \infty$$

$$m = \frac{\sqrt{4a-3+1}}{2}$$

$$(1) \quad x = \sqrt{12 + \sqrt{12 - \sqrt{12 + \sqrt{12}}}} \dots \infty$$

$$x = \frac{\sqrt{4a-3+1}}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{45+1}}{2}$$

$$x = \frac{3\sqrt{5+1}}{2}$$

$$(2) \quad x = \sqrt{5 + \sqrt{5 - \sqrt{5 + \sqrt{5 - \sqrt{5}}}} \dots \infty$$

$$x = \frac{\sqrt{4a-3+1}}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{17+1}}{2}$$

$$(3) \quad M = \sqrt{9 + \sqrt{9 - \sqrt{9 + \sqrt{9}}}} \dots \infty$$

$$m = \frac{\sqrt{4x9-3+1}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{33+1}}{2}$$

Type-6

$$N = \sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a}}}} \dots \infty$$

$$N = \frac{\sqrt{4a-3-1}}{2}$$

(2)

$$x = \sqrt{3 - \sqrt{3 + \sqrt{3 - \sqrt{3 + \sqrt{3 - \sqrt{3}}}} \dots \infty$$

$$x = \frac{\sqrt{4a-3-1}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{4 \times 3 - 3 - 1}}{2}$$

$$= \frac{3-1}{2}$$

$$= 1$$

$$(3) \quad x = \sqrt{8 - \sqrt{8 + \sqrt{8 - \sqrt{8}}}} \dots \infty$$

$$x = \frac{\sqrt{4 \times 8 - 3 - 1}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{29-1}}{2}$$

$$F. \quad x = \sqrt{10 - \sqrt{10 + \sqrt{10 - \sqrt{10}}}} \dots \infty$$

$$x = \frac{\sqrt{4 \times 10 - 3 - 1}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{37-1}}{2}$$

Type-7

$$P = \sqrt{a + b \sqrt{a + b \sqrt{a + b \sqrt{a + b \sqrt{a}}}} \dots \infty$$

दो चरों वाले रैखिक समीकरण

- दो व्यंजकों के बीच "=" बराबर का चिह्न लगाकर उनकी समानता व्यक्त की जाये तो वह समीकरण कहलाता है। "बराबर" के चिह्न के एक तरफ बायां पक्ष तथा दूसरी तरफ दायां पक्ष होता है।
- समीकरण के दोनों पक्षों में समान (अशून्य) राशि जोड़ने, घटाने, गुणा अथवा भाग करने पर समीकरण के मान में कोई परिवर्तन नहीं होता है। समीकरण की तुलना तराजू से की जाती है।
- समीकरण में एक पक्ष से दूसरी तरफ राशि ले जाना पक्षांतरण कहलाता है। इसमें दूसरी तरफ ले जाने पर राशि का चिह्न बदल जाता है। "
- समीकरण में किसी पक्ष में दो राशियाँ गुणन/भाग के रूप में हो तथा दूसरी तरफ उनका भाग/गुणन करना वज्र गुणन कहलाता है।
- समीकरण को हल करने पर अज्ञात राशि का मान दी गई समीकरण को संतुष्ट करता है।
- सरल समीकरण**- यदि समीकरण में केवल एक चर राशि हो और केवल प्रथम घात की हो।
- युगपत समीकरण** - दो चरों वाले तथा प्रथम घात के समीकरणों का युग्म
 $a_1x + b_1y + c_1 = 0$; $a_2x + b_2y + c_2 = 0$
- हल विधि- विलोपन विधि, एक चर राशि के गुणांक समान कर उसका विलोपन करते हैं तथा दूसरे चर का मान ज्ञात कर किसी एक समीकरण की सहायता से पुनः विलोपित चर का मान ज्ञात करते हैं।
- वज्रगुणन विधि-**

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{a_2c_1 - a_1c_2} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

दो चर वाले एक घातीय समीकरण :-

$$ax + by + c = 0$$

जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ हैं ($a, b \neq 0$) यहाँ दो चर x व y हैं

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \vee \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

जहाँ $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ वास्तविक संख्याएँ हैं !

$$a^2 + b^2 \neq 0 \quad \vee \quad a^2 + b^2 \neq 0$$

दो चरों वाले रैखिक समीकरण को हल करना :-

समीकरण, जिसको $ax + by + c = 0$ के रूप में रखा जा सकता या निरूपित किया जा सकता है, जहाँ a, b तथा c वास्तविक संख्याएँ हैं तथा a एवं b दोनों शून्य नहीं हैं, ($a^2 + b^2 \neq 0$), दो चरों x और y में एक रैखिक समीकरण (LINEAR EQUATION IN TWO VARIABLES) कहलाता है।

उदाहरण:

$$2x + 3y - 5 = 0$$

यहाँ, $a=2, b=3$ तथा $c=-5$ जो कि वास्तविक संख्याएँ हैं।

$$\text{तथा } 2^2 + 3^2 \neq 0$$

उपरोक्त समीकरण ($2x+3y-5=0$) का हल मान लिया कि $x=1$ तथा $y=1$ को रैखिक समीकरण ($2x+3y-5=0$) में रखने पर

अतः,

$$2 \times 1 + 3 \times 1 - 5 = 0$$

$$\Rightarrow 2 + 3 - 5 = 0$$

$$\Rightarrow 0 = 0$$

अर्थात् बायाँ पक्ष (LHS) = दायाँ पक्ष (RHS).

अतः $x=1$ तथा $y=1$ दिये गये रैखिक समीकरण का हल है।

न्यामितीय दृष्टि से रैखिक समीकरण का अर्थ (Geometrically meaning of Linear Equation)

समीकरण का प्रत्येक हल उसको निरूपित करने वाली रेखा पर स्थित एक बिन्दु होता है।

यह किसी भी रैखिक समीकरण के लिए सत्य है, अर्थात् दो चरों वाले रैखिक समीकरण $ax + by + c = 0$ का

अतः जब $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

तब, दो चरों में रैखिक समीकरण युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल होते हैं।

मान लिया कि दो चरों में रैखिक समीकरण का एक युग्म है:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ तथा}$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \text{ तब}$$

Sl	अनुपातों की तुलना	ग्राफीय निरूपण	बीजगणितीय निरूपण
1	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	प्रतिच्छेद करती हुई रेखाएँ	केवल एक हल (अद्वितीय (Unique))
2	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	संपाती रेखाएँ	अपरिमित रूप से अनेक हल
3	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	समांतर रेखाएँ	कोई हल नहीं

कुछ उदाहरण →

Example-1 $4x + py + 8 = 0$, $2x + 2y + 2 = 0$ में p के किस मान के लिए अद्वितीय हल होगा ?

हल → अद्वितीय हल $= \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

$$\therefore \frac{4}{2} \neq \frac{p}{2} \text{ और } p \neq 4$$

Example-2 $8x + 12y = 18$ तथा $4x + 6y = 9$ के कितने हल होंगे ?

हल → $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

$$= \frac{8}{4} = \frac{12}{6} = \frac{18}{9} \text{ के अनंत हल होंगे !}$$

Example-3 समीकरण $x + 2y = 5$ व $3x + ky + 15 = 0$ में हल विद्यमान नहीं हो तो k का मान होगा ?

हल → $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{k} \neq \frac{-5}{15} \text{ या } \frac{1}{3} = \frac{2}{k} = k = 6$$

Example-4 $3x + \frac{4y}{3} = 10$ व $5x - \frac{2y}{3} = 8$

हल → $3x + \frac{4y}{3} = 10$

$$\Rightarrow 9x + 4y = 30 \text{ ---(i)}$$

$$= 5x - \frac{2y}{3} = 8$$

$$\Rightarrow 15x - 2y = 24 \text{ ---(ii)}$$

समीकरण (ii) को 2 से गुणा कर (i) में जोड़ने पर

$$\Rightarrow 39x = 78$$

$$\Rightarrow x = 2$$

$x = 2$ समीकरण (i) में रखने पर

$$\Rightarrow 9 \times 2 + 4y = 30$$

$$\Rightarrow 4y = 12$$

$$\Rightarrow y = 3$$

$$y = 3, x = 2$$

एक घातीय युगपत समीकरणों का लेखाचित्र द्वारा हल :-

उदाहरण:- दिये गए समीकरणों $x + y = 5$ तथा $x - y = 1$ को हल करके इनके मानों को ग्राफ पर दर्शाइए !

$$x + y = 5 \text{ ----(i)}$$

$$x - y = 1 \text{ ----(ii)}$$

समीकरण (i) से, $y = 5 - x$

$x = 1$ रखने पर

$$\Rightarrow y = 5 - 1 = 4$$

$x = 2$ रखने पर

$$\Rightarrow y = 5 - 2 = 3$$

$x = 3$ रखने पर

$$\Rightarrow y = 2$$

$x = 4$ रखने पर

$$\Rightarrow y = 1$$

$x = 5$ रखने पर

$$\Rightarrow y = 0$$

अब समीकरण (ii) से, $x = 1 + y$

$y = 1$ रखने पर

$$\Rightarrow x = 1 + 0 = 1$$

$y = 1$ रखने पर

$$\Rightarrow x = 1 + 1 = 2$$

$y = 2$ रखने पर

$$\Rightarrow x = 3$$

$y = 3$ रखने पर

$$\Rightarrow x = 4$$

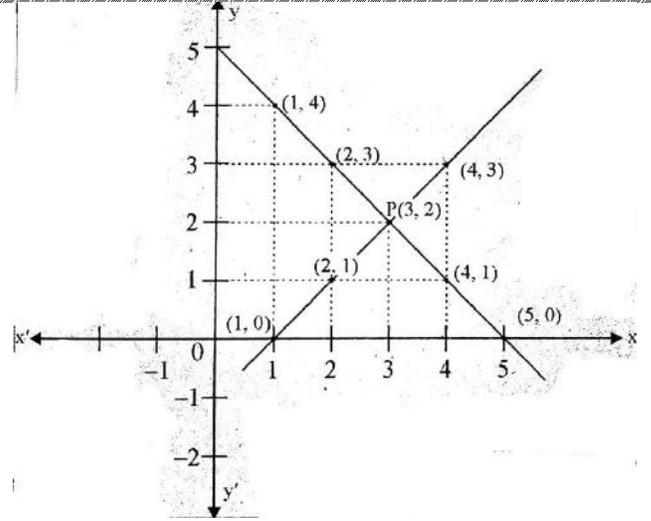
समी. (i) से प्राप्त (x, y) के निर्देशांक \rightarrow

$(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (5, 0)$

समी. (ii) से प्राप्त (x, y) के निर्देशांक \rightarrow

$(1, 0), (2, 1), (3, 2), (4, 3)$

इन समीकरणों के पैमानों का ग्राफ (लेखाचित्र) \rightarrow



द्विघात समीकरण

दो घात की बहुपदीय समीकरण को द्विघात समीकरण कहते हैं! व्यापक रूप से इसे व्यक्त निम्न प्रकार से कर सकते हैं $-ax^2 + bx + c = 0$ जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ होंगी तथा $a \neq 0$.

द्विघात समीकरण के मूल (Roots of Quadratic Equations) :

द्विघात समीकरण के अभाज्य गुणखण्ड के मान जो उस द्विघात समीकरण में रखने पर मान को शून्य कर दें!

द्विघात समीकरण (Quadratic equation) :- भारतीय गणितज्ञ श्रीधराचार्य (750 AD) ने द्विघात समीकरण (व्यापक रूप) का सामान्य हल निम्नलिखित प्रकार से ज्ञात किया था !

द्विघात समीकरण का व्यापक रूप है $ax^2 + bx + c = 0$ या $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$ [$4a$ से गुणा करने पर] या $4a^2x^2 + 4abx = -4ac$ [दोनों तरफ b^2 जोड़ने पर]

$$\text{या } (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

दोनों पक्षों का वर्गमूल लेने पर

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\text{या } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

अतः द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ तथा } \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ होंगे !}$$

द्विघात समीकरण के हल : $ax^2 + bx + c = 0$ को हल करते समय निम्न ध्यान रखें -

(i) $ax^2 \times c$ का मान bx के गुणनखण्डों के गुणा के बराबर होना चाहिए !

उदाहरण -

$$(1) \quad x^2 + 16x + 55 = 0$$

$$x^2 \times 55 = 11x \times 5x = 55x^2$$

$$(2) \quad x^2 + 7x - 120 = 0$$

$$= x^2 \times (-120) = 15x \times (-8x)$$

$$= -120x^2$$

(ii) bx के गुणनखण्ड का योग व घटाव करने के पश्चात bx प्राप्त होना चाहिए !

उदाहरण -

$$(1) \quad x^2 + \frac{16x}{bx} + 55 = 0$$

$$16x = \frac{11x + 5x}{bx \text{ के गुणनखण्ड}} = 16x$$

$$(2) \quad x^2 + \frac{2x}{bx} + 8 = 0$$

$$= \frac{4x - 2x}{bx \text{ के गुणनखण्ड}} = 2x$$

उदाहरण :

$$(1) \quad 5x^2 + 16x + 12 = 0$$

$$= 5x^2 + 10x + 6x + 12 = 0$$

$$= 5x(x + 2) + 6(x + 2) = 0$$

$$= (x + 2)(5x + 6) = 0$$

$$= x + 2 = 0 \text{ या } x = -2$$

$$= 5x + 6 = 0$$

$$\text{या } 5x = -6 \text{ या } x = \frac{-6}{5}$$

इस समीकरण के शून्यांक या मूल -2 व $\frac{-6}{5}$ हैं ! इसका मान समीकरण में रखने पर समीकरण का मान शून्य प्राप्त होता है !

short ट्रिक -

5 और 12 को आपस में गुणा करेंगे तो 60 मिलेगा फिर 16 और 60 को इस प्रकार से दो समान संख्या में तोड़ना है की उन्हें जोड़ने पर 16 मिले पर गुणा करने पर 60 प्राप्त हो ।

$$5x^2 + 16x + 12 = 0$$

$$5 \times 12 \quad 16$$

इसे हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं ।

$$6 \times 10 \quad 10 + 6$$

यहाँ 10 और 6 ऐसी संख्या हैं जिन्हें जोड़ने पर 16 और गुणा करने पर 60 प्राप्त हो रहा है ।

अतः हमारे हल हैं 10 और 6 इनको 5 से भाग देने पर

$$\frac{10}{5}, \frac{6}{5} = 2, 1.2$$

क्योंकि प्रश्न में दोनों जगह +, + हैं अतः दोनों मान - होंगे ।

$$x = -2, -1.2$$

इस प्रकार से आप द्विघात समीकरण को कम समय में हल कर सकते हैं ।

$$(2) \quad x^2 - 14x + 40 = 0$$

$$= x(x - 10) - 4(x - 10) = 0$$

$$= (x - 10)(x - 4) = 0$$

$$= x - 10 = 0 \text{ या } x = 10$$

$$= x - 4 = 0 \text{ या } x = 4$$

short ट्रिक -

14 और 40 को इस प्रकार से दो समान संख्या में तोड़ना है की उन्हें जोड़ने पर 14 मिले पर गुणा करने पर 40 प्राप्त हो।

$$x^2 - 14x + 40 = 0$$

$$\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ 10+4 & 10 \times 4 \end{array}$$

यहाँ 10 और 4 ऐसी संख्या है जिन्हें जोड़ने पर 14 और गुणा करने पर 40 प्राप्त हो रहा है।

अतः x के मान 10 और 4 होंगे

चूँकि समीकरण में चिन्ह - और + है अतः x के दोनों मान + + होंगे।

$$x = +10, +4$$

नोट :-

समीकरण में चिन्ह	प्राप्त मानों में चिन्ह
++	--
-+	++
+-	-+
--	+-

$$(3) \quad x^2 + 7x - 120 = 0$$

$$= x^2 + 15x - 8x - 120 = 0$$

$$= x(x + 15) - 8(x + 15) = 0$$

$$= (x + 15)(x - 8) = 0$$

$$= x + 15 = 0 \text{ या } x = -15$$

$$= x - 8 = 0 \text{ या } x = 8$$

$$(4) \quad x^2 - 7x - 120 = 0$$

$$= x^2 - 15x + 8x - 120 = 0$$

$$= x(x - 15) + 8(x - 15) = 0$$

$$= (x - 15) = 0 \text{ या } x = 15$$

$$= x + 8 = 0 \text{ या } x = -8$$

द्विघात समीकरण को श्रीधराचार्य सूत्र द्वारा हल करना : महान गणितज्ञ श्री धराचार्य द्वारा द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ को हल करने का मानक सूत्र दिया जो निम्न प्रकार है-

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

इस सूत्र से 2 मान प्राप्त होते हैं जो क्रमशः α (अल्फा) व β (बीटा) कहलाते हैं!

$$\text{उदाहरण : } x^2 - 7x + 6 = 0$$

समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के रूप में है!

जहाँ $a = 1$, $b = -7$ तथा $c = 6$ है!

श्रीधराचार्य सूत्र के -

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{मान रखने पर } = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 1 \times 6}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{+7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2} = \frac{+7 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2}$$

$$\frac{7+5}{2} \text{ व } \frac{7-5}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ व } \frac{2}{2} = 1$$

अतः समीकरण $x^2 - 7x + 6$ के मूल क्रमशः 6 व 1 हैं!

द्विघात समीकरण के मूलों की प्रकृति :

$$\Rightarrow y(y - 3) + 11(y - 3) = 0$$

$$\Rightarrow (y - 3)(y + 11) = 0$$

$$\Rightarrow y = 3, -11$$

Therefore, $x > y$

Question 5

I. $x^2 - 13\sqrt{2}x + 60 = 0$

II. $y^2 + 3\sqrt{5}y - 20 = 0$

(A) if $x > y$

(B) if $x \leq y$

(C) if $x \geq y$

(D) if $x < y$

(E) if $x = y$ or x तथा y के बीच में कोई सम्बन्ध नहीं

Correct Option: A

I. $x^2 - 13\sqrt{2}x + 60 = 0$

$$\Rightarrow x^2 - 10\sqrt{2}x - 3\sqrt{2}x + 60 = 0$$

$$\Rightarrow x(x - 10\sqrt{2}) - 3\sqrt{2}(x - 10\sqrt{2}) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3\sqrt{2})(x - 10\sqrt{2}) = 0$$

$$x = 3\sqrt{2}, 10\sqrt{2}$$

II. $y^2 + 3\sqrt{5}y - 20 = 0$

$$\Rightarrow y^2 + 4\sqrt{5}y - \sqrt{5}y - 20 = 0$$

$$\Rightarrow y(y + 4\sqrt{5}) - \sqrt{5}(y + 4\sqrt{5}) = 0$$

$$\Rightarrow (y - \sqrt{5})(y + 4\sqrt{5}) = 0$$

$$\Rightarrow y = -4\sqrt{5}, \sqrt{5}$$

Question 6

I. $25x^2 - 90x + 72 = 0$

II. $y^2 + 26y + 168 = 0$

(A) if $x > y$

(B) if $x \leq y$

(C) if $x \geq y$

(D) if $x < y$

(E) if $x = y$ or x तथा y के बीच में कोई सम्बन्ध नहीं

Correct Option: A

I. $25x^2 - 90x + 72 = 0$

$$\Rightarrow (5x - 6)(5x - 12) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{6}{5}, \frac{12}{5}$$

II. $y^2 + 26y + 168 = 0$

$$\Rightarrow (y + 12)(y + 14) = 0$$

$$\Rightarrow y = -12, -14$$

Hence, $x > y$

Hence, option A is correct.

Question 7

I. $20x^2 - 108x + 144 = 0$

II. $8y^2 + 18y + 4 = 0$

(A) if $x > y$

(B) if $x \leq y$

(C) if $x \geq y$

$$= (5n - 150) - (4n - 120) = 3y$$

$$= n - 3y = 30 \text{ ---(1) तथा}$$

$$\frac{(n-48)}{\frac{4}{5}y} - \frac{(n-48)}{y} = \frac{36}{60}$$

$$= \frac{5(n-48)}{4y} - \frac{(n-48)}{4} = \frac{3}{5}$$

$$= 25(n-48) - 20(n-48) = 12y$$

$$= 5n - 12y = 240 \text{ ---(2)}$$

(1) को 5 से गुणा करके (2) में से घटाने पर

$$34 = 90 = y = 30 \text{ km/h}$$

(ii) एक व्यक्ति ने पाया कि उसे एक वृताकार मैदान को उसके व्यास के अनुसार पार करने में उसकी परिधीय पर चलने की तुलना में 30 सेकंड कम लगे तदनुसार यदि उसकी गति 30 मीटर प्रति मिनट रही हो तो उस वृताकार मैदान की त्रिव्या कितनी होगी ? ($\pi = \frac{22}{7}$)

$$\text{हल} \rightarrow 2\pi r - 2r = 30 \times \frac{1}{2}$$

$$2r \left(\frac{22}{7} - 1 \right) = 15$$

$$r = 7/2$$

$$r = 3.5$$

अध्याय - 16

कार्य और समय

- किसी काम को करने वाले आदमी तथा उस काम को पूरा करने में लगे समय में व्युत्क्रमानुपाती संबंध होता है।
- यदि कोई व्यक्ति n दिन में कोई काम समाप्त करता है, तो 1 दिन में $\frac{1}{n}$ काम समाप्त होगा, जैसे- A , 10 दिन में एक काम करता है, तो 1 दिन उसके द्वारा $\frac{1}{10}$ काम संपन्न होगा।
- यदि 1 दिन में $\frac{1}{n}$ काम संपन्न होता हो, तो पूरे काम को समाप्त करने में लगा समय n होगा, जैसे- यदि 1 दिन में $\frac{1}{12}$ काम किया जाता हो, तो पूरे काम को करने में लगा कुल समय = 12 दिन।
- किसी काम को करने वाले व्यक्तियों की क्षमता और उनके द्वारा काम को पूरा करने में लगे समय में व्युत्क्रमानुपाती संबंध होता है। यदि तीन व्यक्तियों की क्षमता का अनुपात $x:y:z$ हो, तो उनके द्वारा किसी काम को अलग-अलग करने में लगे समय का अनुपात $\frac{1}{x}:\frac{1}{y}:\frac{1}{z}$ होगा, जैसे- $4:5:6$ अनुपात की क्षमता वाले तीन व्यक्तियों द्वारा किसी काम को अलग-अलग करने में लगे समय का अनुपात = $\frac{1}{4}:\frac{1}{5}:\frac{1}{6} = 15:12:10$
- किसी काम को करने वाले व्यक्तियों को $m:n$ अनुपात में बदल दिया जाए, तो काम को करने में लगा समय $n:m$ अनुपात में बदल जाता है।

Important Tricks

Tricks-1

- यदि A किसी काम को m दिन में करता है तथा B उसी काम को n दिन में करता है तो A तथा B मिलकर उस कार्य को करेंगे = $\frac{m \times n}{m+n}$ दिन में।

उदाहरण: यदि A तथा B किसी काम को क्रमशः 16 तथा 24 दिन में समाप्त करते हैं, तो दोनों मिलकर उस काम को कितने दिन में समाप्त करेंगे?

हल :

$$\text{अभीष्ट समय} = \frac{16 \times 24}{16+24} = \frac{16 \times 24}{40} = \frac{48}{5} = 9\frac{3}{5} \text{ दिन}$$

Tricks-2

- यदि A तथा B किसी काम को m दिन में करते हैं और A उसी काम को n दिन में करता है तो B अकेले उस काम को $= \frac{m \times n}{m-n}$ दिन में करेगा।

उदाहरण: A तथा B किसी काम को 16 दिन में करते हैं। A अकेले उसी काम को 24 दिन में करता है, तो B अकेले उस काम को कितने दिनों में करेगा ?

हल:

$$\text{अभीष्ट समय} = \frac{24 \times 16}{24-16} = \frac{24 \times 16}{8} = 48 \text{ दिन}$$

Tricks-3

- A, B तथा C किसी काम को क्रमशः x दिन, y दिन तथा z दिन में करते हैं। यदि तीनों साथ-साथ काम करना आरम्भ करे लेकिन A काम समाप्त होने से t दिन पहले तथा B काम समाप्त होने के t_2 दिन पहले काम करना छोड़ दे, तो काम पूरा होने में लगा समय $= \frac{xyz}{xy+yz+zx} (1 + \frac{t_1}{x} + \frac{t_2}{y})$ दिन

उदाहरण: A, B तथा C किसी काम को क्रमशः 10 दिन, 20 दिन तथा 30 दिन में समाप्त करते हैं। यदि तीनों काम करना शुरू करे, लेकिन A काम पूरा होने के एक दिन पहले तथा B काम पूरा होने के तीन दिन पहले काम छोड़ दे, तो काम समाप्त होने में कुल कितना समय लगेगा ?

हल:

∴ C पूरे समय तक काम करता है।

$$\therefore \frac{x-1}{10} + \frac{x-3}{20} + \frac{x}{30} = 1$$

$$\therefore x = \frac{75}{11} = 6\frac{9}{11} \text{ दिन}$$

वैकल्पिक विधि:

काम पूरा करने में लगा समय

$$\begin{aligned} &= \frac{10 \times 20 \times 30}{10 \times 20 + 20 \times 30 + 10 \times 30} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{20}\right) \\ &= \frac{10 \times 20 \times 30}{200 + 600 + 300} \times \frac{25}{20} \\ &= \frac{75}{11} = 6\frac{9}{11} \text{ दिन} \end{aligned}$$

Tricks-4

- A और B एक काम को क्रमशः x दिन, तथा y दिन में पूरा कर सकते हैं। उन्होंने साथ-साथ काम आरम्भ किया, परन्तु A ने किसी कारणवश t दिन बाद काम छोड़ दिया। शेष काम को B द्वारा पूरा करने में लगा समय $= (y-t) - \frac{y \times t}{x}$ दिन

नोट- यदि B किसी कारणवश d दिन बाद काम छोड़ दे, तो शेष काम को A द्वारा पूरा करने में लगा समय $= (x-d) - \frac{x \times d}{y}$ दिन

उदाहरण: A तथा B एक काम को क्रमशः 12 और 15 दिन में पूरा कर सकते हैं। उन्होंने साथ-साथ काम करना आरम्भ किया, परन्तु A ने बीमारी के कारण 4 दिन बाद काम करना छोड़ दिया। B कितने दिनों में समाप्त करेगा?

हल:

$$\text{अभीष्ट समय} = 15 - 4 - \frac{15 \times 4}{12} = 6 \text{ दिन}$$

$$\therefore x = \frac{75}{11} = 6\frac{9}{11} \text{ दिन}$$

Tricks-5

- A, B तथा C किसी काम को क्रमशः x दिन, y दिन तथा z दिन में समाप्त करते हैं। यदि तीनों एक साथ काम करना आरम्भ करे लेकिन
(a) A काम शुरू होने के t_1 दिन बाद तथा B काम समाप्त होने के t_2 दिन पहले काम

छोड़ दे, तो काम समाप्त होने में लगा कुल समय = $\frac{yz}{y+z} (1 - \frac{t_1}{x} + \frac{t_2}{y})$ दिन

(b) B काम शुरू होने के t_1 दिन बाद तथा C काम समाप्त होने के t_2 दिन पहले काम छोड़ दे, तो काम समाप्त होने में लगा कुल समय = $\frac{xz}{x+z} (1 - \frac{t_1}{y} + \frac{t_2}{z})$ दिन

उदाहरण: A, B तथा C किसी काम को क्रमशः 10 दिन, 15 दिन तथा 12 दिन में समाप्त करते हैं। यदि तीनों काम आरंभ करे लेकिन A कार्य शुरू होनी के 2 दिन बाद B काम समाप्त होने के 1 दिन पहले काम करना छोड़ दे, तो काम समाप्त होने में कुल कितना समय लगेगा?

हल:

$$\therefore \frac{2}{10} + \frac{x-1}{15} + \frac{x}{12} = 1$$

$$\therefore x = \frac{52}{9} = 5 \frac{7}{9} \text{ दिन}$$

Short method -

Q.1 A, B और C किसी काम को 10 दिन, 12 दिन और 15 दिन में करते हैं !

- I. उनकी कार्य क्षमता किस अनुपात में होगी ?
- II. उनको मजदूरी किस अनुपात में मिलेगी ?
- III. प्रत्येक आदमी का काम में हिस्सा कितना होगा भिन्न के रूप में ज्ञात करें !
- IV. यदि सबको कुल मिलाकर 750 रु. मजदूरी मिले तो अलग - अलग कि मजदूरी बताओं !
- V. A व B मिलकर उस काम को कितने दिन में काम करेंगे!
- VI. A व C मिलकर उस काम को कितने दिन में काम करेंगे!

हल :- Let = 60 (LCM)

- I. कार्यक्षमता का अनुपात 6 : 5 : 4
- II. मजदूरी भी कार्यक्षमता के आधार पर दी जाती है इसलिए इसका अनुपात भी कार्यक्षमता के समान होगा ! अतः 6 : 5 : 4 होगा !
- III. प्रत्येक कर्मचारी का हिस्सा
A की हिस्सेदारी = $\frac{A \text{ की कार्यक्षमता}}{\text{पूरी कार्यक्षमता}} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$
B की हिस्सेदारी = $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$
C की हिस्सेदारी = $\frac{4}{15}$
- IV. 750 रु. मजदूरी दी जाती है ! = $\frac{750}{15}$
50 रु./ प्रति क्षमता (मजदूरी)
अतः A की = $6 \times 50 = 300$ रु.
B की = $5 \times 50 = 250$ रु.
C की = $4 \times 50 = 200$ रु.
- V. A व B मिलकर = $\frac{75}{11} = 6 \frac{9}{11}$ दिन में करेंगे
- VI. A व C मिलकर = $\frac{75}{10} = 7.5$ दिन में करेंगे

Note :- यदि कार्यक्षमताओं की संख्या यदि 2 हो तो काम जुड़ने की स्थिति में आने वाला समय = $\frac{xy}{x+y}$
काम घटने की स्थिति में लगने वाला समय = $\frac{xy}{x-y}$

Q.2 यदि A और B नल मिलकर किसी टंकी को 6 घण्टे में भर सकते हैं अकेला A उसे 10 घण्टे में भर सकता है तो अकेला B कितने घण्टे में भरेगा !

किसी व्यक्ति के द्वारा एकांक समय में किये गये कार्य को उसकी कार्यक्षमता कहा जाता है !

एक साथ मिलकर काम करने की स्थिति में मजदूरी का भुगतान उनकी कार्यक्षमता के अनुपात में ही किया जाता है !

किन्हीं व्यक्ति के द्वारा मिलकर या अलग-अलग काम करने पर लगने वाला समय-

$$\text{Time} = \frac{\text{कुल काम}}{\text{एक दिन का काम}}$$

क्षमता नल नल + छिद्र

10 ली. 9 ली.

नल टंकी में 10 लीटर पानी भर रहा है लेकिन टंकी में रिसाव होने के कारण केवल 9 लीटर पानी बचता है अर्थात् इस रिसाव में 1 लीटर प्रति घण्टे पानी निकलता है! तो 90 लीटर की टंकी को खाली होने में 90 घण्टे लगेंगे!

$$= \frac{xy}{x-y} = \frac{9 \times 10}{10-9} = 90 \text{ घण्टे}$$

यह प्रश्न काम घण्टे की स्थिति से है इसलिए दोनों बार का कुल समय x और y हो तो समय $= \frac{xy}{x-y}$ से ज्ञात कर सकते हैं!

Q.17 एक नल टंकी को 8 घण्टे में भर सकता है लेकिन उसमें रिसाव होने के कारण 2 घण्टे अतिरिक्त समय लगता है तो पूरी भरी हुई टंकी कितने समय में खाली होगी!

Let = 80 (LCM)

8 H 10 H

नल क्षमता नल + छिद्र

10 8

$$= \frac{80}{10-8} = \frac{80}{2} = 40$$

Q.18 दो पाईप A और B अलग - अलग किसी टंकी को क्रमशः 60 मिनट और 75 मिनट में भर सकते हैं, टंकी की तली में उसको खाली करने के लिए एक तीसरा पाईप लगा है यदि तीनों पाईपों को एक साथ खोल दिया जाए तो टंकी 50 मिनट में भर जाती है अकेला तीसरा पाईप टंकी को कितने समय में खाली कर सकता है!

1 Method

Let = 300(LCM)

A = 5 ली.

B = 4 ली.

A + B + C = 6 ली.

A + B + C - (A + B)

= 3 लीटर

A और B 9 लीटर पानी भरते हैं उसमें C को साथ जोड़ते हैं केवल 6 ली. बचता है अर्थात् C इसमें से जरूर ही 3 लीटर खाली कर रहा है!

$$= \frac{300}{3} = 100 \text{ मिनट}$$

2 Method

A = 25 टंकी = 1500

B = 20

C =

$$50 = \frac{1500}{25+20-C}$$

$$2250 - 1500 = 50C$$

क्षमता C = 15

$$= \frac{1500}{15} = 100 \text{ मिनट}$$

कार्यकर्ताओं में प्रायिकता वितरण :-

type - A B और C किसी काम 10 दिन 12 दिन 15 दिन में पूरा कर सकते हैं यदि उनको एक समय एक साथ काम करने पर पूरे कार्य के 1200 रु. मिलते हैं तो तीनों की मजदूरी एक दिन का जोड़ कितनी होगी!

Let = 60 (LCM) क्षमता

$$= \frac{60}{5+6+4} \quad 6 : 5 : 4$$

$$= \frac{60}{15} = 4 \text{ दिन} \quad 4 \text{ unit} = 1200$$

$$1 \text{ unit} = 300$$

प्रत्येक दिन मजदूरी

$$15 = 300$$

$$1 \text{ unit} = 20$$

$$\text{तो } 6 \times 200 = 1200 \text{ रु.}$$

$$5 \times 200 = 1000 \text{ रु.}$$

$$4 \times 200 = 800 \text{ रु.}$$

Q.19 किसी काम को पूरा करने के लिए A, B और C ने 5 दिन 6 दिन 11 दिन काम किया यदि उनकी दैनिक मजदूरी का अनुपात 7 : 4 : 3 हो तो उनके मिलने वाले कुल भुगतान का अनुपात

	A	B	C
हाजरी	5	6	11
मजदूरी	7	4	3
कुल भुगतान	35	24	33

Q.20 दो आदमियों ने 1400 रु. में किसी कार्य को करने का ठेका लिया ! उनमें से एक अकेला उस कार्य को 7 दिन में तथा दूसरा 8 दिन में पूरा कर सकता है ! एक लड़के के साथ उन दोनों ने मिलकर उस कार्य को 3 दिन में पूरा कर लिया ! लड़के को उसके कार्य के लिए कितनी धन राशि मिलेगी ?

$$(a) 300 \text{ रु.}$$

$$(c) 275 \text{ रु.}$$

$$(b) 325 \text{ रु.}$$

$$(d) 250 \text{ रु.}$$

Solution :-

$$\text{Let} = 168(\text{LCM})$$

$$A \text{ एक} = 7 \text{ दिन}$$

$$B \text{ दूसरा} = 8 \text{ दिन}$$

$$ABC = 3$$

$$\text{क्षमता } A = 24$$

$$B = 21$$

$$ABC = 56$$

$$C = ABC - AB = 11$$

$$\text{तो } C = \frac{11}{56} \times 1400 = 275 \text{ रु.}$$

$$\text{या } 56 = 1400$$

$$1 \text{ unit} = \frac{100}{4}$$

$$\text{तो } 11 \text{ unit} = 11 \times \frac{100}{4} = 275 \text{ रु.}$$

Working Unit

Q.21 किसी काम को 15 आदमी 40 दिन में पूरा कर सकते थे !

(1) सबसे पहले 8 आदमियों ने 15 दिन काम किया उसके बाद 10 आदमियों ने 8 दिन उसके बाद 6 आदमियों ने 20 दिन , 15 आदमी 6 दिन तक किया तो शेष बचा काम कितने unit या और उसे 10 आदमी कितने दिन में कर सकते हैं !

$$\text{Total काम} = 15 \times 40 = 600 \text{ unit}$$

$$\text{Now } 8 \text{ आदमी } 15 \text{ दिन} = 120 \text{ unit}$$

$$10 \text{ आदमी } 8 \text{ दिन} = 80 \text{ unit}$$

$$6 \text{ आदमी } 20 \text{ दिन} = 120 \text{ unit}$$

$$15 \text{ आदमी } 6 \text{ दिन} = \underline{90}$$

$$= \underline{410}$$

शेष कार्य = 190 unit तो 10 आदमी इसे कितने दिन में करेंगे = $\frac{190}{10} = 19$ दिन

Note :- $\frac{MDH}{W} = \frac{MDH}{W}$ सूत्र में कार्यकर्ताओं की संख्या , पुरुषों की संख्या , महिला , बच्चे इसके अलावा समय यदि किसी भी मात्रक दिन महीने वर्ष सप्ताह घण्टे , मिनट , सेकण्ड तो वह भी ऊपर ही लिखा

अध्याय - 18

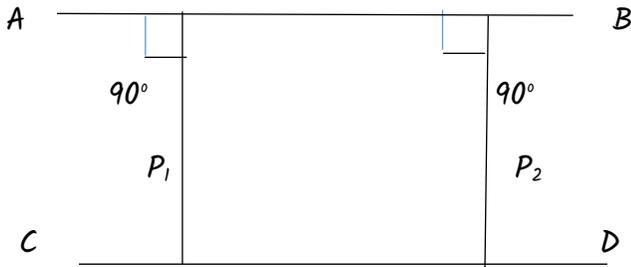
ज्यामिति

• सरल रेखा :-

A. _____ . B

रेखा संकेत = AB

• समान्तर रेखाये :-



- यहाँ AB व CD एक दूसरे की समान्तर रेखाएँ हैं, इन्हें 0° रेखा या अप्रतिच्छेदी रेखा भी कहते हैं !

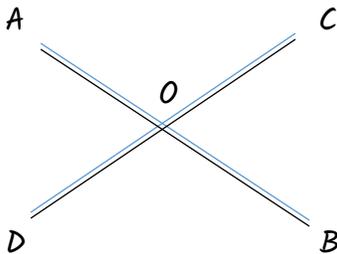
○ संकेत = $AB \parallel CD$

- समान्तर रेखाओं के बीच की लम्बवत दूरियाँ हमेशा बराबर होती हैं

$$P_1 = P_2$$

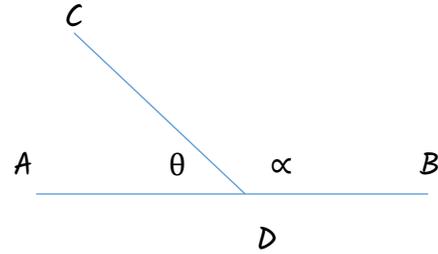
- AB व CD की लम्बाइयाँ बराबर हो तो संकेत $AB = CD$

• असमान्तर रेखाये :-

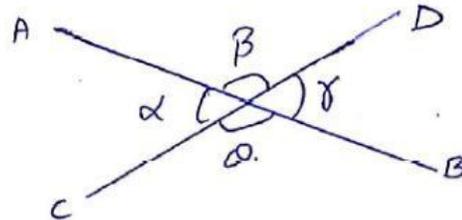
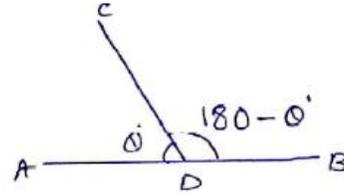


- AB तथा CD असमान्तर रेखाये हैं इन्हें प्रतिच्छेदी रेखा भी कहते हैं ।

- यदि दो रेखाएँ प्रतिच्छेद करती हैं तो उनके शीर्षाभिमुख कोण बराबर होते हैं ! यहाँ $\angle AOD = \angle COB$ व $\angle AOC = \angle DOB$ होंगे !
- यदि $\theta + \alpha = 180^\circ$ हो तो कोण θ व α सम्पूरक कोण (Supplementary Angle) होंगे ।



- यदि $\theta + \alpha = 90^\circ$ हो तो θ व α पूरक / Complementary कोण होंगे !
- रेखिक कोण युग्म :-



रेखिक कोण युग्म :-

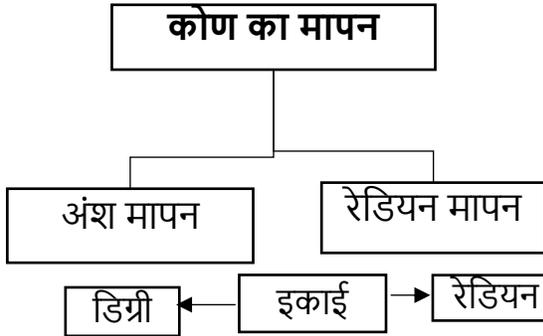
α व β

β व γ

γ व θ

θ व α

$\alpha = \gamma, \beta = \theta$ (शीर्षाभिमुख कोण)



π रेडियन = 180° डिग्री

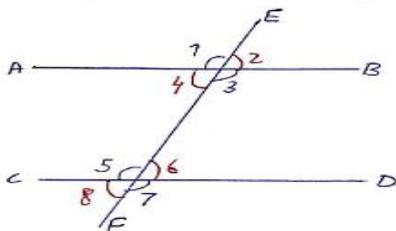
1 रेडियन = $\frac{180^\circ}{\pi}$ or $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ रेडियन

x रेडियन = $\frac{180^\circ}{\pi} \times x$ डिग्री

or $x^\circ = \frac{\pi}{180} \times x$ रेडियन

कोणों के प्रकार :-

1. जब $0^\circ < \theta < 90^\circ$ हो - न्यून कोण
 2. जब $\theta = 90^\circ$ हो - समकोण
 3. जब $90^\circ < \theta < 180^\circ$ हो- अधिक कोण
 4. जब $\theta = 180^\circ$ हो- ऋजु / सरल कोण
 5. जब $180^\circ < \theta < 360^\circ$ हो - वृहत कोण
- जब दो समान्तर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा काटे तो -



(1) शीर्षाभिमुख कोण बराबर होंगे ! जैसे :-

$\angle 1 = \angle 3$	$\angle 2 = \angle 4$
$\angle 5 = \angle 7$	$\angle 6 = \angle 8$

(2) संगत कोण बराबर / समान होंगे-

$\angle 2 = \angle 6$	$\angle 1 = \angle 5$
$\angle 3 = \angle 7$	$\angle 4 = \angle 8$

(3) एकांतर कोण बराबर होंगे -

$\angle 3 = \angle 5$	$\angle 1 = \angle 7$
-----------------------	-----------------------

(आंतरिक एकांतर कोण) (बाह्य एकांतर कोण)

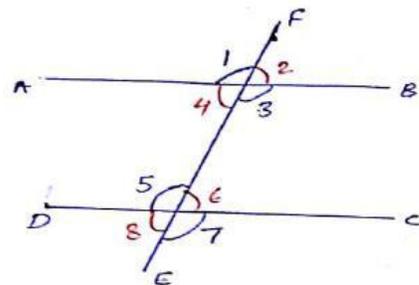
$\angle 4 = \angle 6$	$\angle 2 = \angle 8$
-----------------------	-----------------------

(4) एक ही तरफ के अंत : कोणों व बाह्य कोण / बहिष्कोण का योग 180° होगा -

$\angle 3 + \angle 6 = \angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$ (अंत :कोण)

$\angle 1 + \angle 8 = \angle 2 + \angle 7 = 180^\circ$ (बहिष्कोण)

Hints :-



- यदि तिर्यक रेखा व रेखा के बीच एक कोण 90° का हो तो सारे angles 90° के होंगे !
- यदि एक भी कोण 90° का न हो तो

Less than 90°

सारे बराबर

Greater than 90°

सारे बराबर

ex. :- $\angle 2 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8$

and $\angle 1 = \angle 3 = \angle 5 = \angle 7$

बहुभुज

उत्तल बहुभुज

अवतल बहुभुज

(Convex)

(Concave)

$\theta < 180^\circ$

angle

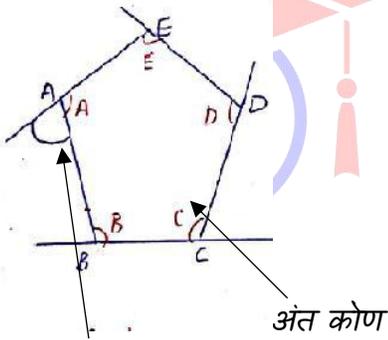
$\theta > 180^\circ$

त्रिभुज

(ex)

चतुर्भुज

सबसे कम भुजा वाला बहुभुज - त्रिभुज



बहिष्कोण

बहुभुज के किसी एक ही बिंदु पर अंत :

कोण + बहिष्कोण = 180°

सभी बहिष्कोणों का योग = 360°

बहुभुज	भुजा	कोण
समबहुभुज	सही	सही
विषम बहुभुज	गलत	गलत

समबहुभुज :-

बहिष्कोण = $\frac{360^\circ}{n}$ अंत : कोण = $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$

(यहाँ n = no. of lines)

भुजाओं की संख्या	n	बहिष्कोण	अंत : कोण
3		120°	60°
4		90°	90°
5		72°	108°
6		60°	120°
7		$51\frac{3}{7}^\circ$	$128\frac{4}{7}^\circ$
8		45°	135°
9		40°	140°
10		36°	144°
भुजाओं की संख्या बढ़ने पर		बहिष्कोण का मान कम / घट रहा है !	अंत : कोण का मान ज्यादा / बढ़ रहा है !

- जब बहिष्कोण > अंत : कोण हो तो वह समबहुभुज - समबाहू त्रिभुज होगा !
- जब बहिष्कोण = अंत : कोण हो तो वह - वर्ग होगा !

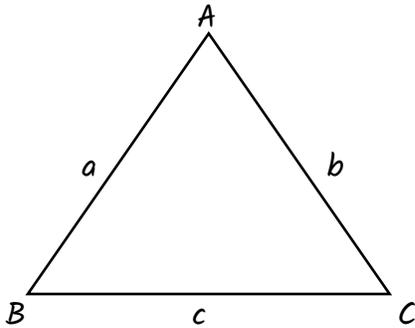
तथा $\angle B = \angle Q = 60^\circ$

ΔABC तथा ΔPQR समरूप हैं।

$PR/AC = QR/BC = 2/1$

Ans. 2/1

Triangle (त्रिभुज) :- तीन भुजाओं से घिरी बंद आकृति को त्रिभुज कहते हैं।



Conditions :-

- किसी त्रिभुज की दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से अधिक होता है!
- किसी त्रिभुज की दो भुजाओं का अंतर तीसरी भुजा से कम होता है!

$$a - b < c \text{ or } b - c < a \text{ or } c - a < b$$

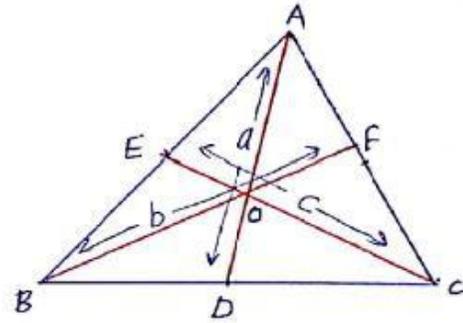
परिमाप $P = a + b + c$,

अर्द्धपरिमाप $S = \frac{a+b+c}{2}$

(हीरेन सूत्र)

क्षेत्रफल $A = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

माध्यिका :



किसी त्रिभुज के एक शीर्ष से सामने वाली भुजा के मध्य बिंदु को मिलाने वाली सीधी रेखा Δ की माध्यिका कहलाती है!

यहाँ a, b, c , ΔABC की 3 माध्यिकाये हैं!

अतः $BD = DC$, $AF = FC$, व $AE = EB$

$$S = \frac{a+b+c}{2} \text{ (a, b, c } \rightarrow \Delta \text{ की माध्यिकाये हैं)}$$

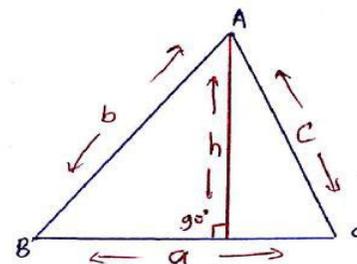
$$\text{क्षेत्रफल} = \frac{4}{3} \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

(a, b, c) माध्यिका वाले Δ का क्षेत्र. = $\frac{4}{3} \times (a, b, c)$ भुजा वाले Δ का क्षेत्रफल

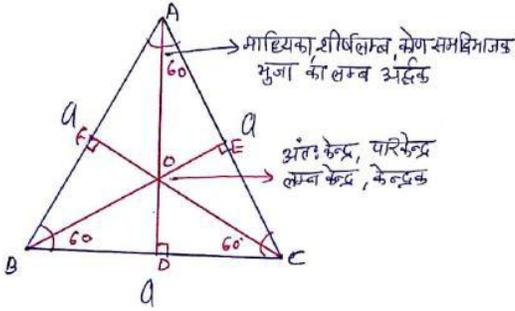
जब Δ की एक भुजा (आधार) व उसकी ऊँचाई (h) दी गई हो तो

$$\Delta \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$$

$$= \frac{1}{2} \times a \times h$$



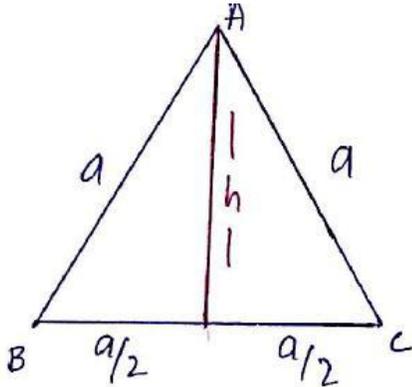
त्रिभुज के प्रकार :-



➔ परिमाण, क्षेत्रफल व ऊचाई :-

$$\text{ऊचाई } h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a \quad \text{-----(1)}$$



$$\text{भुजा } a = \frac{2}{\sqrt{3}} h \quad \text{-----(2) or}$$

$$a : h$$

$$2 : \sqrt{3}$$

$$\text{परिमाण } P = 3a \quad \text{-----(3) क्षेत्रफल}$$

$$= 3 \times \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$p = 2\sqrt{3}h \quad \text{-----(4)}$$

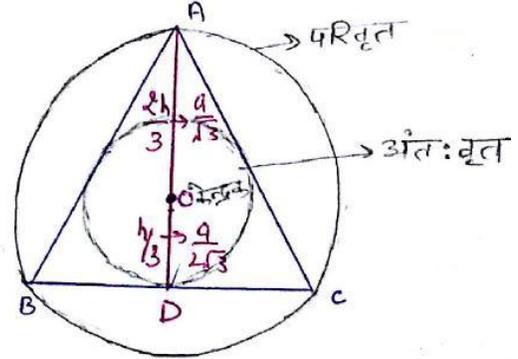
समबाहु त्रिभुज में बने अंतः वृत्त, परिवृत्त का क्षेत्रफल :-

$$\text{अंतः वृत्त की त्रिज्या } R_{(1)} = \frac{h}{3} = \frac{a}{2\sqrt{3}} \quad \text{-----(1)}$$

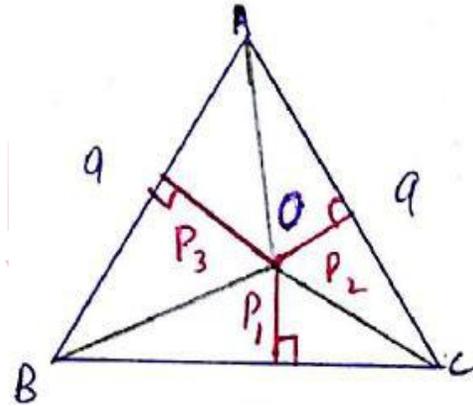
$$\therefore \text{अंतः वृत्त का क्षेत्रफल} = \frac{\pi h^2}{9} = \frac{\pi a^2}{12} \quad \text{-----(2)}$$

$$\text{परिवृत्त की त्रिज्या } R_c = \frac{2h}{3} = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad \text{-----(3)}$$

$$\text{परिवृत्त का क्षेत्रफल } A_c = \frac{4\pi h^2}{9} = \frac{\pi a^2}{3} \quad \text{-----(4)}$$



समबाहु Δ में कोई बिंदु 'O' व 'O' से डाले गये लम्ब (भुजाओं पर) दिये गये हो तो



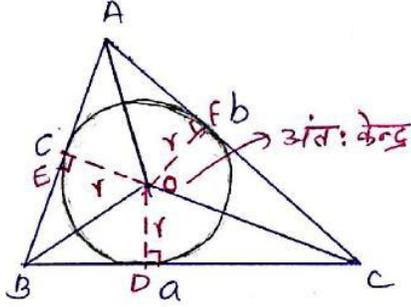
बिंदु 'O' से भुजाओं पर डाले गये लम्ब P_1, P_2 व P_3 हैं तो

$$\frac{1}{2} a P_1 + \frac{1}{2} a P_2 + \frac{1}{2} a P_3 = \frac{1}{2} a h$$

$$h = P_1 + P_2 + P_3$$

$$\therefore \text{भुजा } a = \frac{2}{\sqrt{3}} (P_1 + P_2 + P_3)$$

जब किसी Δ की अंतः वृत्त की Radius व Δ की भुजाएँ दे रखी हो



ΔABC का क्षेत्र. = $\Delta AOB + \Delta BOC + \Delta AOC$ का क्षेत्र.

$$= \frac{1}{2} \times c \times r + \frac{1}{2} \times a \times r + \frac{1}{2} \times b \times r$$

$$= \frac{1}{2} \times r \times (a + b + c)$$

$$= \frac{1}{2} \times r \times P \text{ (परिमाप)} \text{-----(1)}$$

अतः ΔABC का क्षेत्र. = $\frac{1}{2} \times$ परिमाप \times अन्तः

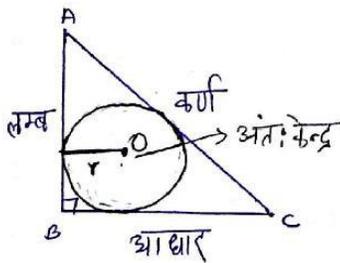
त्रिज्या = अर्द्धपरिमाप \times अन्तः वृत्त की त्रिज्या

अब किसी समकोण Δ में

$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्र.} = \frac{1}{2} \times AB \times BC = \frac{1}{2} Pr \text{ (समी. (1) से)}$$

$$\therefore r \text{ (त्रिज्या)} = \frac{AB \times BC}{P} = \frac{\text{लम्ब} \times \text{आधार}}{\text{परिमाप}} \text{---(3)}$$

$$\text{अतः अन्तः केन्द्र की त्रिज्या } r_1 = \frac{\text{लम्ब} + \text{आधार} - \text{कर्ण}}{2} \text{---(4)}$$

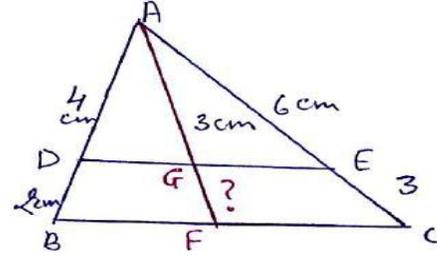


Q > :- Δ में GF की लम्बाई क्या होगी जब भुजा DE, BC के समान्तर हो!

∴ यहाँ $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ है अतः

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE} = \frac{x}{y} \text{ होगा व } \frac{AB}{AD} = \frac{AF}{AG}$$

(माध्यिका व भुजा का अनुपात)

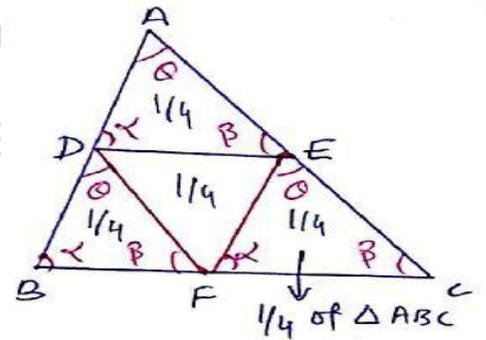


So $\frac{6}{4} = \frac{AF}{3} = AF = \frac{18}{4} = 4.5 \text{ cm}$

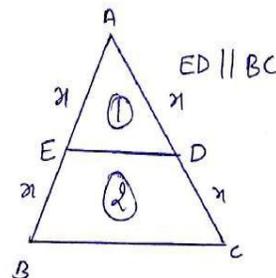
अतः $GF = AF - AG = 1.5 \text{ cm Ans}$

यदि D, AB व E, AC का मध्य बिंदु हो तो (DE || BC) or

$$DE = \frac{1}{2} BC$$



अर्थात् किसी Δ की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा, उस Δ की तीसरी भुजा के समान्तर व आधी होती है!



Δ (1) का क्षेत्र. : Δ (2) का क्षेत्र.

प्रिय दोस्तों, अब तक हमारे नोट्स में से अन्य परीक्षाओं में आये हुए प्रश्नों के परिणाम देखने के लिए क्लिक करें - (Proof) ↓

RAS PRE. - https://www.youtube.com/watch?v=p3_i-3qfDy8&t=1253s

VDO PRE. - <https://www.youtube.com/watch?v=gXdAk856Wl8&t=202s>

Patwari - <https://www.youtube.com/watch?v=X6mKGdtXyu4&t=2s>

PTI 3rd grade - https://www.youtube.com/watch?v=iA_MemKKgEk&t=5s

VDO Pre. - <https://www.youtube.com/watch?v=gXdAk856Wl8>

EXAM (परीक्षा)	DATE	हमारे नोट्स में से आये हुए प्रश्न
RAS PRE. 2021	27 अक्टूबर	74 प्रश्न आये
SSC GD 2021	16 नवम्बर	68 (100 में से)
SSC GD 2021	30 नवम्बर	66 (100 में से)
SSC GD 2021	01 दिसम्बर	65 (100 में से)
SSC GD 2021	08 दिसम्बर	67 (100 में से)
राजस्थान S.I. 2021	14 सितम्बर	119 (200 में से)
राजस्थान S.I. 2021	15 सितम्बर	126 (200 में से)
RAJASTHAN PATWARI 2021	23 अक्टूबर (1st शिफ्ट)	79 (150 में से)

whatsapp-<https://wa.link/6z7do2> 1 web.- <https://cutt.ly/9NCBSnA>

RAJASTHAN PATWARI 2021	23 अक्तूबर (2 nd शिफ्ट)	103 (150 में से)
RAJASTHAN PATWARI 2021	24 अक्तूबर (2 nd शिफ्ट)	91 (150 में से)
RAJASTHAN VDO 2021	27 दिसंबर (1 st शिफ्ट)	59 (100 में से)
RAJASTHAN VDO 2021	27 दिसंबर (2 nd शिफ्ट)	61 (100 में से)
RAJASTHAN VDO 2021	28 दिसंबर (2 nd शिफ्ट)	57 (100 में से)
U.P. SI 2021	14 नवम्बर 2021 1 st शिफ्ट	91 (160 में से)
U.P. SI 2021	21 नवम्बर 2021 (1 st शिफ्ट)	89 (160 में से)

& Many More Exams like UPSC, SSC, Bank Etc.

नोट्स खरीदने के लिए इन लिंक पर क्लिक करें



Whatsapp - <https://wa.link/6z7do2>

Online order - <https://cutt.ly/9NCBSnA>

whatsapp-<https://wa.link/6z7do2> 2 web.- <https://cutt.ly/9NCBSnA>